Solusi Olimpiade Sains Tingkat Kabupaten/Kota 2015
Bidang Matematika

Oleh : Tutur Widodo

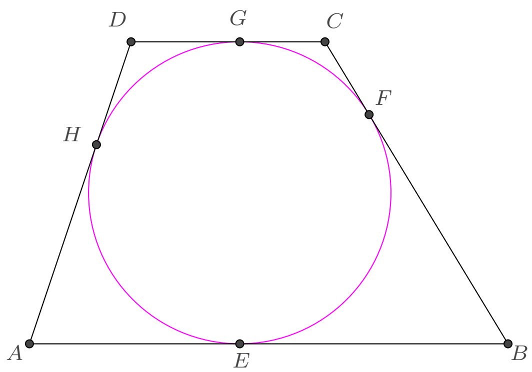
1. Karena $2015 = 5 \times 13 \times 31$ maka banyaknya faktor positif dari 2015 adalah $(1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$

2. Untuk mencari banyak cara memperoleh jumlah mata dadu sama dengan 9 ekivalen dengan mencari koefisien x^9 dari $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6$.
   Perhatikan bahwa
   $$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x^3)(1 + x + x^2)$$
   sehingga
   $$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6 = x^6(1 + x^3)^6(1 + x + x^2)^6$$
   x^9 dapat diperoleh dengan dua cara yaitu
   a. mengalikan x^6, suku x^3 dari penjabaran $(1 + x^3)^6$ dan suku konstan dari penjabaran $(1+x+x^2)^6$. Padahal koefisien x^3 dari penjabaran $(1+x^3)^6$ adalah 6 dan konstanta dari $(1 + x + x^2)^6$ adalah 1. Jadi, diperoleh koefisien x^9 adalah $1 \times 6 \times 1 = 6$.
   b. mengalikan x^6, suku konstan dari penjabaran $(1 + x^3)^6$ dan suku x^3 dari penjabaran $(1 + x + x^2)^6$. Mudah dilihat bahwa konstanta dari penjabaran $(1 + x^3)^6$ adalah 1 dan (dengan sedikit usaha dan bantuan binom newton) diperoleh koefisien x^3 dari penjabaran $(1 + x + x^2)^6$ adalah 50. Jadi, diperoleh koefisien x^9 adalah $1 \times 1 \times 50 = 50$.

   Total dari dua cara di atas diperoleh koefisien x^9 adalah 56. Oleh karena itu, peluang muncul jumlah mata dadu 9 adalah $\dfrac{56}{6^6}$

3. $f(2) = f\Big(g(3)\Big) = \dfrac{24}{6} = 4$

4. Misalkan lingkaran dalam menyinggung sisi-sisi trapesium $ABCD$ berturut-turut di E, F, G, H, seperti terlihat pada gambar di bawah ini



Dengan memanfaatkan sifat garis singgung diperoleh $AE = AH$, $BE = BF$, $CG = CF$ dan $DG = DH$. Hal ini berakibat keliling trapesium $ABCD$ sama dengan

$$2(AB + CD) = 2(84 + 25) = 218$$

5. Misalkan $a_1 = a$ dan rasio barisan geometri tersebut adalah r, sehingga diperoleh $a+ar^3 = 20$. Jika $r = 1$ diperoleh $a = 10$ dan jumlah $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 60$. Untuk selanjutnya kita anggap $r \neq 1$.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{a(r^3 + 1)(r - 1)(r^2 + r + 1)}{r - 1} \\ &= 20(r^2 + r + 1) \\ &= 20\left(\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \geq 20 \times \frac{3}{4} = 15 \end{aligned}$$

Jadi, nilai minimum dari $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ adalah 15, diperoleh saat suku pertama sama dengan $\frac{160}{7}$ dan rasio $-\frac{1}{2}$.

6. Dari keterangan soal diperoleh

$$\begin{aligned} 1500 < 11x < 2000 &\Leftrightarrow 137 \leq x \leq 181 \\ 970 < 7x < 1275 &\Leftrightarrow 139 \leq x \leq 182 \\ 690 < 5x < 900 &\Leftrightarrow 139 \leq x \leq 179 \end{aligned}$$

Jadi, didapat $139 \leq x \leq 179$. Sedangkan bilangan bulat yang habis dibagi 15 dalam interval $[139, 179]$ adalah

$$\left\lfloor \frac{179}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{139}{15} \right\rfloor = 11 - 9 = 2$$

7. Karena kondisi soal maka (mau tidak mau) tiap siswa dari masing-masing kelompok belajar harus duduk berdampingan. Oleh karena itu banyaknya cara menyusun cara duduk siswa-siswa tersebut yaitu

$$(5 - 1)! \times 2! \times 2! \times 2! \times 3! \times 3! = 6912$$

8. Soal ini mah hajar aja pake analitik =)
Misalkan $B(0, 0)$, $A(0, 5)$ dan $C(12, 0)$, maka diperoleh persamaan lingkaran

$$\begin{aligned} L_1 : x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 5y = 0 \\ L_2 : (x - 6)^2 + y^2 = 36 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 12x = 0 \end{aligned}$$

Dari dua persamaan di atas diperoleh $5y = 12x$. Substitusikan kembali hasil ini ke pers.

pertama diperoleh

$$x^2 + \left(\frac{12x}{5}\right)^2 - 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{12 \cdot 25}{169}$$

Sehingga

$$BP = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12x} = \sqrt{\frac{12^2 \cdot 25}{169}} = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}$$

Jadi,

$$\frac{240}{BP} = 240 \cdot \frac{13}{60} = 52$$

9. Misalkan $a + b = x$ dan $ab = y$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 = 6 \quad &\Leftrightarrow \quad (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = 6 \\ &\Leftrightarrow \quad \left((a+b)^2 - 2ab\right)^2 - a^2b^2 = 6 \\ &\Leftrightarrow \quad (x^2 - 2y)^2 - y^2 = 6 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - ab = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - y = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = y + 4 \end{aligned}$$

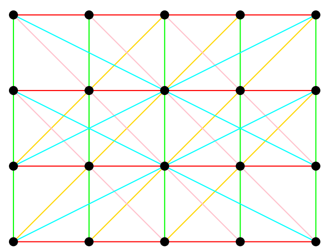
Dari dua persamaan terakhir didapat

$$8y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5}{4}$$

Sehingga

$$x = \sqrt{y + 4} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{21}$$

10. Total segitiga yang dapat dibentuk dari 20 titik tanpa ada tiga titik yang segaris adalah adalah $\binom{20}{3} = 1140$. Namun pada kenyataannya, dari 20 titik yang diberikan banyak titik yang segaris. Rinciannya sebagai berikut :



a. 5 titik segaris sebanyak 4 baris (garis warna merah). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak $4 \times \binom{5}{3} = 40$

b. 4 titik segaris sebanyak 5 kolom (garis warna hijau). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak $5 \times \binom{4}{3} = 20$

c. Arah diagonal ke kanan juga ada beberapa titik yang segaris (garis warna orange). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak $2 \times \binom{3}{3} + 2 \times \binom{4}{3} = 10$

d. Arah diagonal ke kiri (garis warna ungu) jumlahnya sama dengan arah diagonal ke kanan. Jadi berkontribusi sebanyak 10.

e. Empat garis penyelinap (saya bingung mau sebut apa, hehehe), (garis warna biru). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak 4.

Oleh karena itu, total jumlah segitiga yang terbentuk dari susunan 4×5 titik tersebut adalah $1140 - (40 + 20 + 10 + 10 + 4) = 1056$

11. Misalkan $N_n = 31^n + x \cdot 96^n$, maka akan dicari bilangan bulat positif x sehingga $N_n \equiv 0 \mod 2015$. Akan tetapi karena $2015 = 5 \times 13 \times 31$, maka cukup dicari bilangan bulat positif x sehingga dipenuhi

$$\begin{aligned} N_n &\equiv 0 \mod 5 \\ N_n &\equiv 0 \mod 13 \\ N_n &\equiv 0 \mod 31 \end{aligned}$$

Dari $N_n \equiv 0 \mod 5$ diperoleh

$$\begin{aligned} 31^n + x \cdot 96^n &\equiv 0 \mod 5 \\ 1 + x &\equiv 0 \mod 5 \\ x &\equiv 4 \mod 5 \end{aligned}$$

Sedangkan dari $N_n \equiv 0 \mod 13$ diperoleh

$$\begin{aligned} 31^n + x \cdot 96^n &\equiv 0 \mod 13 \\ 5^n + x \cdot 5^n &\equiv 0 \mod 13 \\ 5^n(1 + x) &\equiv 0 \mod 13 \\ 1 + x &\equiv 0 \mod 13 \\ x &\equiv 12 \mod 13 \end{aligned}$$

Terakhir dari $N_n \equiv 0 \mod 31$ didapat

$$\begin{aligned} 31^n + x \cdot 96^n &\equiv 0 \mod 31 \\ x &\equiv 0 \mod 31 \end{aligned}$$

Pada akhirnya diperoleh persamaan kongruensi

$$x \equiv 4 \bmod 5$$
$$x \equiv 12 \bmod 13$$
$$x \equiv 0 \bmod 31$$

Silakan dicoba sendiri menyelesaikan persamaan di atas (tidak susah, relatif mudah). Nanti didapat $x \equiv 1364 \bmod 2015$. Jadi, nilai terkecil dari x adalah 1364.

12. Gunakan pembagian polinom secara sintetik, diperoleh

$$p(n) = n^6 + 2n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 2 + \frac{2015}{n^2 - n + 1}$$

Mengingat $n^2 - n + 1 > 0$ maka $n^2 - n + 1$ adalah faktor positif dari 2015. Ada 8 kemungkinan, silakan dikuli jaya, hehehe. Ada enam nilai n yang memenuhi yaitu $\{-5, -3, 0, 1, 4, 6\}$

13. Perhatikan bahwa

$$P(a) + a = P(b) + b = P(c) + c = a + b + c = 5$$

Misalkan $Q(x) = P(x) + x - 5 = Ax^3 + Bx^2 + (C + 1)x - 2020$, maka a, b, c adalah akar-akar dari $Q(x)$. Akibatnya

$$Ax^3 + Bx^2 + (C + 1)x - 2020 = A(x^3 - 5x^2 - 9x + 10)$$

Sehingga diperoleh $A = -202$. Selanjutnya diperoleh pula nilai $B = 1010, C = 1817$. Jadi, $A + B + C = (-202) + 1010 + 1817 = 2625$.

14. Berdasarkan teorema garis bagi diperoleh $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{5}{4}$. Dan berdasarkan Ceva didapat

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$$

Sehingga

$$CD = \frac{5}{9} \cdot 5 = \frac{25}{9} = \frac{m^2}{n^2}$$

Jadi, $m - n = 5 - 3 = 2$.

15. Karena $a - b$ prima maka $FPB(a, b) = 1$. Di sisi lain, ab adalah kuadrat sempurna, sehingga a dan b keduanya juga bilangan kuadrat. Misalkan $a = k^2$ dan $b = m^2$ untuk suatu bilangan asli k, m. Mengingat $a - b = p$ dengan p prima ganjil, diperoleh

$$p = k^2 - m^2 = (k + m)(k - m)$$

sehingga $k + m = p$ dan $k - m = 1$ yang berarti $k = \frac{p+1}{2}$ dan $m = \frac{p-1}{2}$.

Terakhir didapat

$$n = a + b = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2} \le 2015$$

sehingga $p \le 63$.
Oleh karena itu, banyaknya bilangan asli n yang memenuhi sama dengan banyaknya bilangan prima ganjil kurang dari 63 yaitu ada 17.

16. Misalkan $\angle BAC = \alpha$, $|AB| = |AC| = |CD| = x$ dan $|BC = y|$. Dari

$$\frac{1}{|CD|} - \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|CD| + |BD|}$$

diperoleh

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2x+y}$$
$$\Leftrightarrow \quad y^2 + xy = x^2$$

Bagi dengan y^2 dan misalkan $\frac{x}{y} = a$, diperoleh

$$1 + a = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dengan aturan cosinus pada $\triangle ABC$ diperoleh

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + x^2 - 2x^2 \cos\alpha \\ 1 &= 2a^2 - a^2 \cos\alpha \\ \cos\alpha &= 1 - \frac{1}{2a^2} \\ \cos\alpha &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Jadi, $\angle BAC = \alpha = 36°$

17. Untuk bilangan-bilangan $1, 2, 3$, masing-masing ambil mod 3 sehingga kita dapatkan $1, -1, 0$. Ada 4 cara untuk mengatur bilangan-bilangan ini dalam baris/kolom, yaitu

$$\begin{aligned} &0, 0, 0 \\ &1, 1, 1 \\ &-1, -1, -1 \\ &-1, 0, 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya kita ambil dua-dua untuk digunakan sebagai pengisi baris satu dan dua. Ada 10 kemungkinan (buset, sejauh ini tetap saja nguli)

a. Ambil $0, 0, 0$ dan $0, 0, 0$ untuk mengisi baris satu dan dua. Obviously, baris tiga ya $0, 0, 0$. Ada 1 cara.

b. Ambil $1, 1, 1$ dan $1, 1, 1$ untuk mengisi baris satu dan dua. Obviously, baris tiga ya $1, 1, 1$. Ada 1 cara.

c. Ambil $-1, -1, -1$ dan $-1, -1, -1$ untuk mengisi baris satu dan dua. Obviously, baris tiga ya $-1, -1, -1$. Ada 1 cara.

d. Ambil $0, 0, 0$ dan $1, 1, 1$ untuk mengisi baris satu dan dua. Tentu saja, baris tiga ya $-1, -1, -1$. Namun, karena posisi antara $0, 0, 0$ dan $1, 1, 1$ dapat ditukar antara baris satu dan dua maka ada 2 cara.

e. Ambil $0, 0, 0$ dan $-1, -1, -1$ untuk mengisi baris satu dan dua. Dan pasti, baris tiga ya $1, 1, 1$. Sekali lagi, karena posisi antara $0, 0, 0$ dan $-1, -1, -1$ dapat ditukar antara baris satu dan dua maka ada 2 cara.

f. Ambil $1, 1, 1$ dan $-1, -1, -1$ untuk mengisi baris satu dan dua. Sedang baris tiga ya pasti $0, 0, 0$. Sekali lagi, karena posisi antara $1, 1, 1$ dan $-1, -1, -1$ dapat ditukar antara baris satu dan dua maka ada 2 cara.

g. Ambil $0, 0, 0$ dan $-1, 0, 1$ untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan. Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak $2 \times 3! = 12$ cara.

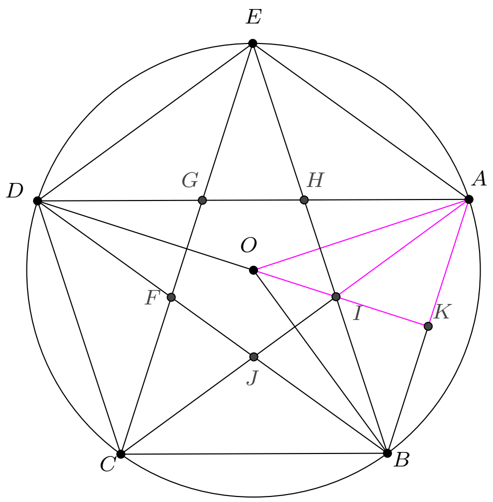
h. Ambil $1, 1, 1$ dan $-1, 0, 1$ untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan. Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak $2 \times 3! = 12$ cara.

i. Ambil $-1, -1, -1$ dan $-1, 0, 1$ untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan. Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak $2 \times 3! = 12$ cara.

j. Ambil $-1, 0, 1$ dan $-1, 0, 1$ untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan. Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak $3! \times 3! = 36$ cara.

Jadi, total ada $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 12 + 12 + 12 + 36 = 81$ cara.

18. Perhatikan gambar di bawah ini!



Tanpa mengurangi keumuman misalkan $OA = 4$, karena $\angle AOK = 36^\circ$ maka $OK = 1 + \sqrt{5}$. Dengan rumus pitagoras pada $\triangle AOK$ diperoleh $AK = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Namun karena $\angle IAK = 36^\circ$ maka $AI = \dfrac{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$. Dengan pitagoras sekali lagi pada $\triangle AIK$ didapat $IK = \dfrac{10-2\sqrt{5}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$.
Sehingga kita peroleh

$$OI = (1+\sqrt{5}) - \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}\right) = \frac{4\sqrt{5}-4}{1+\sqrt{5}}$$

akibatnya

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \left(\frac{OA}{OI}\right)^2 \\ &= \left(4 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}-4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

19. Misalkan pasangan (a_{i-1}, a_i) dengan $a_{i-1} > a_i$ kita sebut sebagai pasangan cantik. Misalkan pula $a_{i-1} = m$ dan $a_i = k$ dengan $1 \le k < m \le 10$. Jelas bahwa bilangan-bilangan $1, 2, \cdots, (k-1)$ pada permutasi hampir naik harus ada di kiri pasangan cantik dan bilangan-bilangan $(m+1), (m+2), \cdots, 10$ ada di kanan pasangan cantik.
Oleh karena itu kita tinggal perlu mengatur bilangan-bilangan $(k+1), (k+2), \cdots, (m-1)$, yang tentu saja bisa terletak di kiri maupun kanan pasangan cantik. Jadi, banyaknya cara mengatur penempatan bilangan-bilangan $(k+1), (k+2), \cdots, (m-1)$ adalah 2^{m-k-1} yang sekaligus ini juga merupakan jumlah permutasi hampir naik yang bisa dibentuk untuk setiap pasangan cantik terpilih.
Padahal dari bilangan-bilangan $1, 2, 3, \cdots, 10$ kita bisa memilih pasangan cantik (m, k) sebanyak $\binom{10}{2} = 45$ dengan rincian :

   (a) Pasangan dengan $m - k - 1 = 0$ ada sebanyak 9 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $9 \times 2^0 = 9$

   (b) Pasangan dengan $m - k - 1 = 1$ ada sebanyak 8 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $8 \times 2^1 = 16$

   (c) Pasangan dengan $m - k - 1 = 2$ ada sebanyak 7 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $7 \times 2^2 = 28$

   (d) Pasangan dengan $m - k - 1 = 3$ ada sebanyak 6 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $6 \times 2^3 = 48$

   (e) Pasangan dengan $m - k - 1 = 4$ ada sebanyak 5 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $5 \times 2^4 = 80$

(f) Pasangan dengan $m - k - 1 = 5$ ada sebanyak 4 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $4 \times 2^5 = 128$

(g) Pasangan dengan $m - k - 1 = 6$ ada sebanyak 3 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $3 \times 2^6 = 192$

(h) Pasangan dengan $m - k - 1 = 7$ ada sebanyak 2 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $2 \times 2^7 = 256$

(i) Pasangan dengan $m - k - 1 = 8$ ada sebanyak 1 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $1 \times 2^8 = 256$

Jadi, total permutasi hampir naik yang bisa dibentuk yaitu $9 + 16 + 28 + 48 + 80 + 128 + 192 + 256 + 256 = 1013$.

20. Tanpa mengurangi keumuman kita cukup memperhatikan nilai untuk $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Perhatikan pada interval $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, fungsi $g(x) = \sin x + \frac{2}{3+\sin x}$ adalah fungsi naik dengan $0 \leq g(x) \leq \frac{3}{2}$. Kita bagi kasus

    a. Untuk $a \geq 0$, maka $f(a) = \frac{3}{2} + a \geq \frac{3}{2}$

    b. Untuk $-\frac{3}{4} \leq x < 0$, maka $f(a) = \frac{3}{2} + a \geq \frac{3}{4}$

    c. Untuk $x \leq -\frac{3}{4}$, maka $f(a) = -a \geq \frac{3}{4}$

    Jadi, nilai terkecil dari $f(a)$ adalah $\frac{3}{4}$.

Disusun oleh : Tutur Widodo
Apabila ada saran, kritik maupun masukan
silakan kirim via email ke
tutur.w87@gmail.com
Website :
www.tuturwidodo.com