SOAL-JAWAB UJIAN
SELEKSI CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2015
TINGKAT KABUPATEN / KOTA

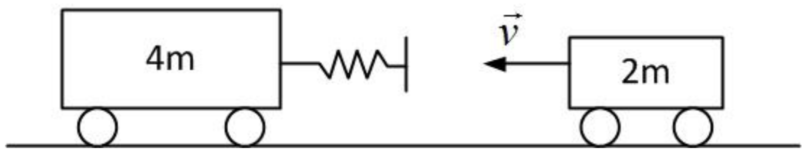
FISIKA

Waktu : 3 jam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2015

1. (**10 poin**) Sebuah mobil massa 2*m* bergerak dengan kecepatan *v* pada saat mendekati mobil lain massa 4*m* yang sedang dalam keadaan diam. Pada saat tumbukan terjadi, pegas terkompresi (lihat gambar!). Tentukan:
   (a) Kecepatan mobil 4*m* pada saat pegas terkompresi maksimum (energinya dianggap kekal)!
   (b) Kecepatan akhir mobil 4*m* setelah lama bertumbukan (energi dianggap kekal)!
   (c) Kecepatan akhir mobil 4*m* jika tumbukannya tidak elastis!



Jawab:

(a) Ketika pegas terkompresi maksimum, kedua mobil pada posisi paling dekat dan pada saat itu kecepatannya *v*'.

Kekekalan momentum: $2mv = (2m + 4m)v'$, (1 poin)

Jadi, $v' = \frac{1}{3}v$. (2 poin)

(b) Kekekalan energi dan momentum:

$$\frac{2mv^2}{2} = \frac{2mv_1^{'2}}{2} + \frac{4mv_2^{'2}}{2}$$ (1 poin)

$$mv = mv_1^{'} + 2mv_2^{'},$$ (1 poin)

dimana $v_1^{'}$, $v_2^{'}$ adalah kecepatan mobil 2*m* dan 4*m* setelah tumbukan. Maka kecepatan akhir mobil 4*m* adalah:

$$v_2^{'} = \frac{2mv - 2mv_1^{'}}{4m} = \frac{2}{3}v$$ (2 poin)

(c) Jika tumbukannya tidak elastis, kedua mobil setelah tumbukan akan bergerak bersama-sama. (1 poin)

Maka kecepatan keduanya adalah $v_1^{'} = v_2^{'} = \frac{1}{3}v$ sama seperti (a). (2 poin)

2. (**10 poin**) Sebuah partikel bergerak dalam lintasan lingkaran dimana jarak yang ditempuh sebagai fungsi waktu dapat dirumuskan dalam bentuk $s = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$, dengan C_1 suatu tetapan positif, sedangkan C_2 dan C_3 suatu tetapan sembarang. Jika pada saat jarak yang ditempuh adalah s_1 dan s_2 (dimana $s_2 > s_1$) maka percepatan totalnya dari partikel berturut-turut adalah a_1 dan a_2 (dimana $a_2 > a_1$). Tentukan jari-jari lingkaran tersebut dinyatakan dalam a_1, a_2, s_1, dan s_2.

Solusi:

Jarak

$$s = C_1 t^2 + C_2 t + C_3 \qquad \text{(1 poin)}$$

Kecepatan

$$v = \frac{ds}{dt} = 2C_1 t + C_2 \qquad \text{(1 poin)}$$

Percepatan tangensial

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2C_1 \qquad \text{(1 poin)}$$

Karena bergerak melingkar maka percepatan sentripetalnya

$$a_s = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(1 poin)}$$

Hubungan antara kecepatan dan jarak di atas adalah

$$v^2 = 4C_1^2 t^2 + 4C_1 C_2 t + C_2^2 = 4C_1\left(s - C_3\right) + C_2^2 \qquad \text{(1 poin)}$$

Percepatan total

$$a_{tot}{}^2 = a_t{}^2 + a_s{}^2 \qquad \text{(1 poin)}$$

$$a_1{}^2 = (2C_1)^2 + \frac{4C_1(s_1 - C_3) + C_2{}^2}{R} \qquad \text{(1 poin)}$$

$$a_2{}^2 = (2C_1)^2 + \frac{4C_1(s_2 - C_3) + C_2{}^2}{R} \qquad \text{(1 poin)}$$

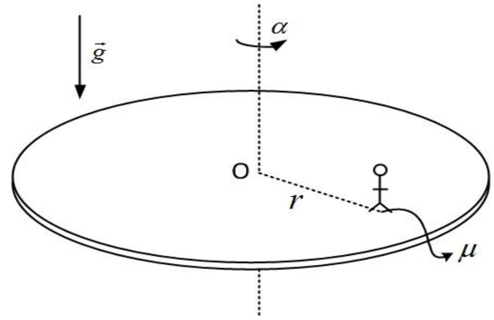
Jika dikurangi, hasilnya

$$a_2{}^2 - a_1{}^2 = \frac{4C_1(s_2 - s_1)}{R} \qquad \text{(1 poin)}$$

Sehingga jari-jari lingkaran adalah

$$R = \frac{4C_1(s_2 - s_1)}{a_2{}^2 - a_1{}^2}. \qquad \text{(1 poin)}$$

3. (**10 poin**) Seperti diperlihatkan dalam gambar, seorang siswa dengan massa M berdiri di atas sebuah meja berbentuk lingkaran, sejauh r dari pusat meja. Katakan koefisien gesek antara sepatu siswa dengan meja tersebut adalah μ. Pada saat awal t = 0 meja mulai berotasi dengan percepatan sudut $\alpha = \ddot{\theta}$ konstan. Anggap gerakan berada dibawah pengaruh percepatan gravitasi konstan g yang arahnya ke bawah.



   (a) Hitung besar percepatan sudut maksimum (α_{maks}) hingga siswa tersebut belum sempat mengalami *slip*.
   (b) Dengan menganggap bahwa $\alpha < \alpha_{maks}$, tentukan vektor gaya gesek total yang dialami oleh siswa tersebut sebelum ia mengalami *slip* dinyatakan sebagai fungsi waktu (t). (Petunjuk : gunakan koordinat polar r, θ)
   (c) Dengan menganggap bahwa $\alpha < \alpha_{maks}$, tentukan kapan siswa tersebut mulai mengalami *slip* terhitung sejak meja pertama kali berotasi.

Jawab:

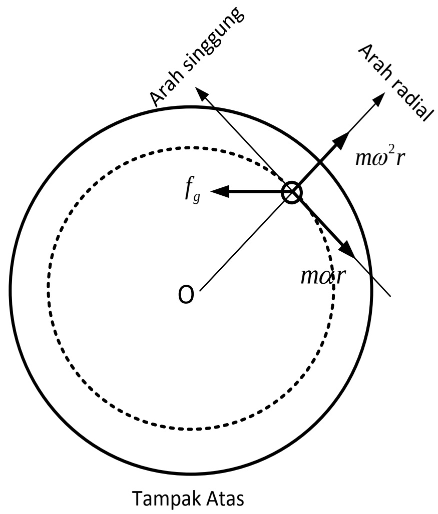
(a) Agar anak tidak mengalami slip pada saat awat (t = 0), maka pada kerangka acuan meja,

$$\sum F_{\text{singgung}} = 0$$
$$f_g - m\alpha r = 0$$
(1 poin)

Nilai percepatan maksimum didapatkan ketika anak tepat akan slip, sehingga

$$\mu mg - m\alpha_{\max} r = 0$$
$$\alpha_{\max} = \frac{\mu g}{r}$$
(2 poin)

(b) Karena $\alpha < \alpha_{\max}$, maka anak akan bergerak dengan lintasan berbentuk lingkaran yang jari-jarinya r. (1 poin)



(1 poin)

Karena α konstan dan pada awalnya meja dalam keadaan diam, maka $\omega(t) = \alpha t$. Jadi pada kerangka acuan meja,

$$\begin{aligned} \vec{f}_g &= m\alpha r\,\hat{\theta} - m\omega^2 r\,\hat{r} \\ &= m\alpha r\left(\hat{\theta} - \alpha t^2\,\hat{r}\right) \end{aligned} \qquad \text{(1 poin)}$$

dengan $\hat{r}$ menyatakan arah radial dan $\hat{\theta}$ menyatakan arah singgung. Jadi besar dari gaya gesek yang bekerja pada anak adalah

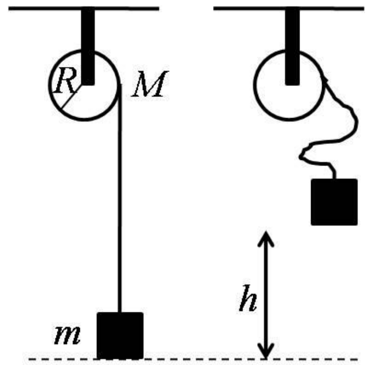
$$f_g = m\alpha r\sqrt{1+\alpha^2 t^4} \qquad \text{(1 poin)}$$

(c). Anak akan tepat akan slip ketika nilai gaya geseknya adalah gaya gesek statik maksimum. Jadi,

$$f_{g,\max} = \mu mg = m\alpha r\sqrt{1+\alpha^2 t^4}$$

$$t = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mu^2 g^2}{r^2} - \alpha^2\right)^{1/4} \qquad \text{(3 poin)}$$

4. (**15 poin**) Sebuah silinder bermassa *M* dan jari-jari *R* dapat berotasi bebas terhadap sumbu horisontalnya. Sebuah tali tak bermassa dililitkan pada permukaan silinder, kemudian sebuah beban bermassa *m* dipasang pada ujung tali. Mula-mula tali berada di bawah silinder. Kemudian beban tersebut dinaikkan setinggi *h* dan dilepaskan tanpa kecepatan awal. Percepatan gravitasi *g* ke bawah. Tentukan waktu yang dibutuhkan sejak beban dilepas hingga menempuh jarak 2*h*. (Tali tidak dapat mulur, interaksi bersifat seketika dan tidak lenting sama sekali)



Jawaban:

Kecepatan beban ketika turun sejauh h dimana saat itu terjadi tumbukan antara tali dengan silinder adalah

$$v=\sqrt{2gh} \qquad (1) \qquad (1\text{ poin})$$

Karena tumbukan bersifat seketika (sangat singkat), efek gaya gravitasi ketika tumbukan dapat diabaikan, sehingga momentum sudut sistem terhadap sumbu rotasi silinder bernilai tetap.
Sesaat sebelum tumbukan,

$$L=mvR \qquad (2) \qquad (1\text{ poin})$$

Sesaat setelah tumbukan

$$L=muR+I\omega=muR+\tfrac{1}{2}MR^2\omega \qquad (3) \qquad (1\text{ poin})$$

dimana v = kecepatan beban sesaat sebelum tumbukan, u = kecepatan beban sesaat setelah tumbukan, I = momen inersia silinder terhadap sumbunya dan ω = kecepatan sudut silinder sesaat setelah tumbukan.

$$mvR=muR+\tfrac{1}{2}MR^2\omega \qquad (4) \qquad (1\text{ poin})$$

Karena tali bersifat tak elastik, maka hal ini memberikan batasan bahwa

$$u=R\omega \qquad (5) \qquad (1\text{ poin})$$

Sehingga

$$mvR=muR+\tfrac{1}{2}MuR \qquad (6)$$

atau

$$u=\frac{2m}{2m+M}v \qquad (7) \qquad (1\text{ poin})$$

Selanjutnya beban akan melakukan gerak dipercepat beraturan dengan kecepatan awal u. Percepatan a ke bawah dapat ditentukan sebagai berikut. Persamaan gaya untuk beban adalah

$$mg-T=ma \qquad (8) \qquad (1\text{ poin})$$

dengan T = tegangan tali. Persamaan gerak rotasi pada silinder adalah

$$TR=I\alpha=\tfrac{1}{2}MR^2(a/R) \qquad (9) \qquad (1\text{ poin})$$

dimana α = percepatan sudut silinder. Maka tegangan tali adalah

$$T=\tfrac{1}{2}Ma \qquad (10) \qquad (1\text{ poin})$$

sehingga jika dimasukkan ke persamaan (8) akan menghasilkan

$$a=\frac{2m}{2m+M}g \qquad (11) \qquad (1\text{ poin})$$

Hasil ini sesungguhnya dapat pula diperoleh dengan menurunkan persamaan (7) ke waktu, dengan mengingat bahwa kecepatan u (setelah tumbukan) bersesuaian dengan percepatan a sedangkan kecepatan v (sebelum tumbukan) bersesuaian dengan percepatan g.
Waktu yang dibutuhkan ketika turun sejauh h sebelum tumbukan adalah

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \text{(1 poin)}$$

Sedangkan waktu yang dibutuhkan ketika turun sejauh h setelah tumbukan memenuhi persamaan

$$h = ut_2 + \tfrac{1}{2}at_2{}^2 = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2m+M}t_2 + \tfrac{1}{2}\frac{2mg}{2m+M}t_2{}^2$$

$$t_2{}^2 + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}t_2 - \frac{h(2m+M)}{mg} = 0$$

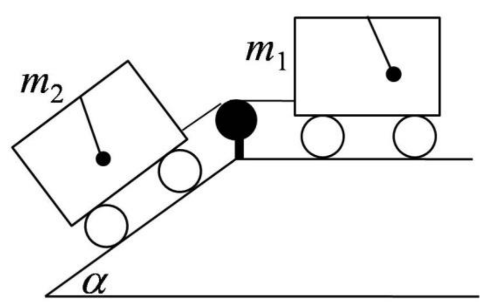
Nilai t_2 yang mungkin adalah

$$t_2 = \frac{-2\sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{8h}{g} + \frac{4h(2m+M)}{mg}}}{2} = \sqrt{\frac{h}{g}}\left(\sqrt{4+M/m} - \sqrt{2}\right) \qquad \text{(2 poin)}$$

Jadi total waktu yang dibutuhkan adalah

$$t_{total} = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{h(4+M/m)}{g}}\,. \qquad \text{(2 poin)}$$

5. (**15 poin**) Dua kereta masing-masing bermassa m_1 dan m_2 dihubungkan dengan tali tak bermassa yang terhubung dengan katrol licin tak bermassa. Kereta m_1 berada pada permukaan horisontal, sedangkan kereta m_2 berada pada bidang miring dengan sudut kemiringan α terhadap horisontal. Di dalam masing-masing kereta terdapat bandul yang massanya dapat diabaikan relatif terhadap massa kereta. Setelah dilepas, posisi masing-masing bandul membentuk sudut terhadap garis vertikal serta diasumsikan bahwa bandul tersebut tidak berayun di dalam kereta. Seluruh permukaan bersifat licin. Percepatan gravitasi g ke bawah. Tentukan sudut kemiringan masing-masing bandul relatif terhadap garis vertikal. Asumsikan jari-jari roda sangat kecil dan massanya dapat diabaikan.



Solusi:
Hukum Newton II untuk kereta m_1 pada arah horisontal/sejajar tali adalah

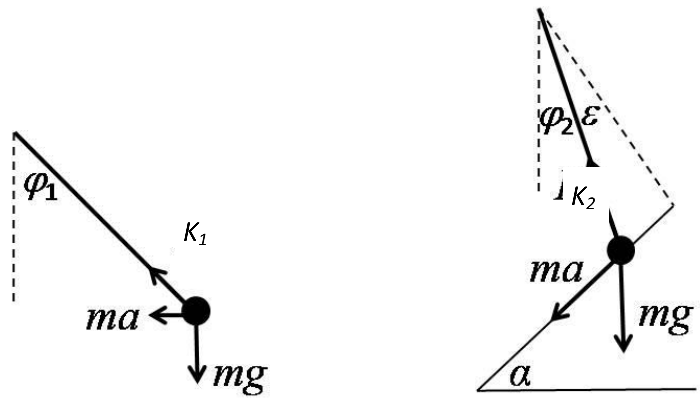
$$T = m_1 a \qquad \text{(1 poin)}$$

dengan T = tegangan tali dan a = percepatan horisontal m_1 ke arah kiri terhadap lantai. Untuk kereta m_2 pada arah sejajar tali

$$m_2 g \sin\alpha - T = m_2 a \qquad \text{(1 poin)}$$

dengan a = percepatan m_2 juga sejajar bidang miring. Gabungan kedua persamaan di atas menghasilkan percepatan

$$a = \frac{m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2} g\ . \qquad \text{(1 poin)}$$



(1 poin)

Bandul 1 Bandul 2

Bandul akan tetap diam relatif terhadap kereta jika percepatan bandul (terhadap lantai) = percepatan kereta (terhadap lantai). Misalnya massa bandul adalah m yang dapat diabaikan jika dibandingkan dengan massa kereta. Pada kereta m_1, sudut antara bandul dengan garis vertikal adalah φ_1, sedangkan gaya tegang pada batang pendulum adalah K. Persamaan gaya adalah

$$K_1 \cos\varphi_1 = mg \ \text{ dan } \ K_1 \sin\varphi_1 = ma \qquad \text{(1 poin)}$$

sehingga

$$\tan\varphi_1 = \frac{a}{g} = \frac{m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2}\ . \qquad \text{(1 poin)}$$

Pada kereta m_2, sudut antara bandul dengan garis vertikal adalah φ_2, sedangkan gaya tegang pada batang pendulum adalah K. Sudut antara bandul dengan garis normal bidang miring adalah ε, sehingga berlaku persamaan sudut

$$\alpha = \varphi_2 + \varepsilon \qquad \text{(1 poin)}$$

Persamaan gaya pada arah sejajar bidang miring adalah

$$mg \sin\alpha - K_2 \sin\varepsilon = ma = mg \frac{m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2} \qquad \text{(1 poin)}$$

Sedangkan pada arah tegaklurus bidang miring adalah

$$mg \cos\alpha - K_2 \cos\varepsilon = 0 \qquad \text{(1 poin)}$$

$$K_2 = mg \frac{\cos\alpha}{\cos\varepsilon} \qquad \text{(1 poin)}$$

Dengan substitusi K_2 ke dalam persamaan di atas diperoleh

$$mg \sin\alpha - mg \tan\varepsilon \cos\alpha = mg \frac{m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2} \qquad \text{(1 poin)}$$

Dibagi dengan $mg\cos\alpha$ menghasilkan

$$\tan\varepsilon = \tan\alpha - \frac{m_2\tan\alpha}{m_1+m_2} = \frac{m_1\tan\alpha}{m_1+m_2}. \qquad \text{(1 poin)}$$

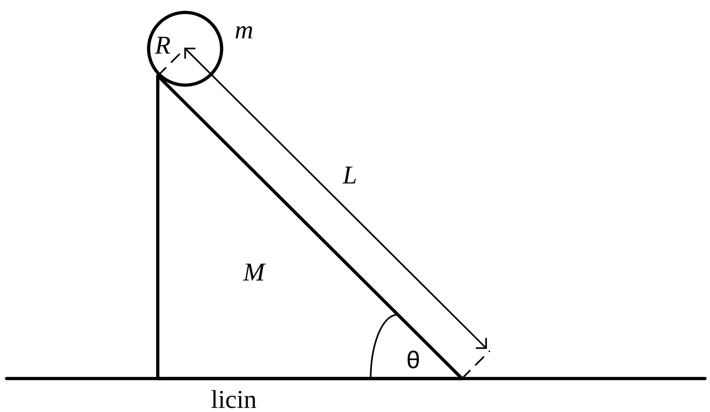
Dengan menggunakan persamaan sudut diperoleh

$$\tan\varphi_2 = \tan(\alpha-\varepsilon) = \frac{\tan\alpha - \tan\varepsilon}{1+\tan\alpha.\tan\varepsilon}. \qquad \text{(1 poin)}$$

Substitusi nilai $\tan\varepsilon$ menghasilkan

$$\tan\varphi_2 = \frac{m_2\sin\alpha\cos\alpha}{m_1+m_2\cos^2\alpha} \qquad \text{(2 poin)}$$

6. (**20 poin**) Sebuah bola pejal homogen bermassa m dan berjari-jari R, dilepaskan dari puncak suatu bidang miring dengan sudut kemiringan $\theta = 45^\circ$ dan bermassa $M = 2m$. Bidang miring dapat bergerak bebas pada suatu bidang horizontal licin (lihat gambar) dan bola selalu bergerak menggelinding tanpa slip. Jika diketahui panjang sisi miring dari bidang miring adalah L dan percepatan gravitasi adalah g, tentukan:

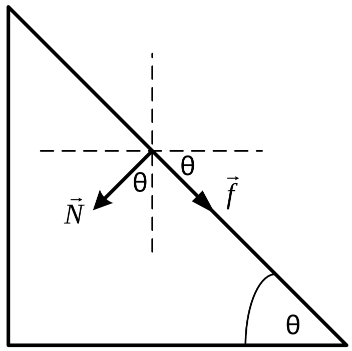


a) besar percepatan pusat massa bola relatif terhadap bidang miring
b) besar percepatan pusat massa bola relatif terhadap bidang horizontal yang diam
c) waktu yang dibutuhkan bola untuk sampai di tepi bawah bidang miring

Solusi

a. Misalkan A adalah percepatan bidang miring relatif terhadap bidang horizontal yang diam dan a adalah percepatan pusat massa bola relatif terhadap bidang miring.

Relatif terhadap bidang horizontal yang diam, diagram gaya untuk bidang miring,

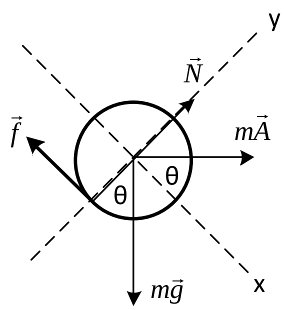


(1 poin)

Hukum 2 Newton untuk arah mendatar adalah

$$N\sin\theta - f\cos\theta = MA \qquad (1)$$ (1 poin)

Relatif terhadap bidang miring, diagram gaya untuk bola adalah:



(1 poin)

Hukum 2 Newton untuk bola adalah:

$$\sum F_y = 0$$
$$N + mA\sin\theta - mg\cos\theta = 0 \qquad (2)$$ (1 poin)

$$\sum F_x = ma$$
$$mg\sin\theta - f + mA\cos\theta = ma \qquad (3)$$ (1 poin)

dan torsi terhadap pusat massa bola adalah:

$$fR = I\alpha \qquad (\text{dengan } I = \frac{2}{5}mR^2) \qquad (4)$$ (1 poin)

Karena bola menggelinding tanpa slip, maka berlaku:

$$a = \alpha R \qquad (5)$$ (1 poin)

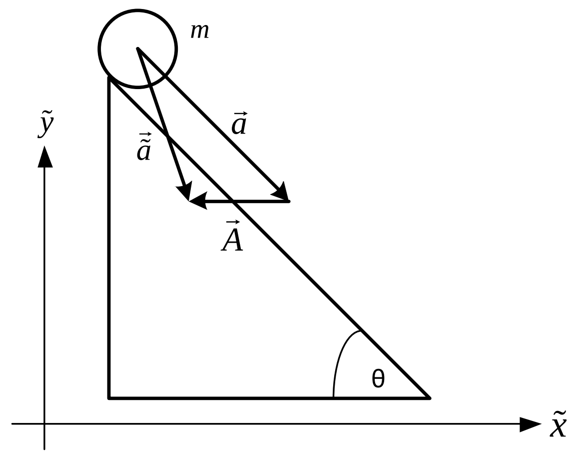
Dari persamaan (3) dan (4), didapatkan bahwa

$$A = \frac{m}{M+m}a\cos\theta \qquad (6)$$ (1 poin)

Substitusi (4) dan (6) ke persamaan (3), didapatkan,

$$a = \frac{g\sin\theta}{\frac{M + m\sin^2\theta}{M + m} + \frac{I}{mR^2}} \qquad (7) \qquad \text{(1 poin)}$$
$$= \frac{15}{37} g\sqrt{2}$$

b. Misalkan $\tilde{a}$ adalah percepatan pusat massa bola relatif terhadap bidang horizontal yang diam, maka



(2 poin)

$$\tilde{a}_x = a\cos\theta - A = \frac{5a}{6\sqrt{2}}$$
$$\tilde{a}_y = -a\sin\theta = -\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (8) \qquad \text{(2 poin)}$$

Jadi besar percepatan pusat massa bola relatif terhadap bidang horizontal yang diam adalah

$$\tilde{a} = \sqrt{\tilde{a}_x^2 + \tilde{a}_y^2}$$
$$= \frac{15g}{222}\sqrt{61} \qquad (9) \qquad \text{(2 poin)}$$

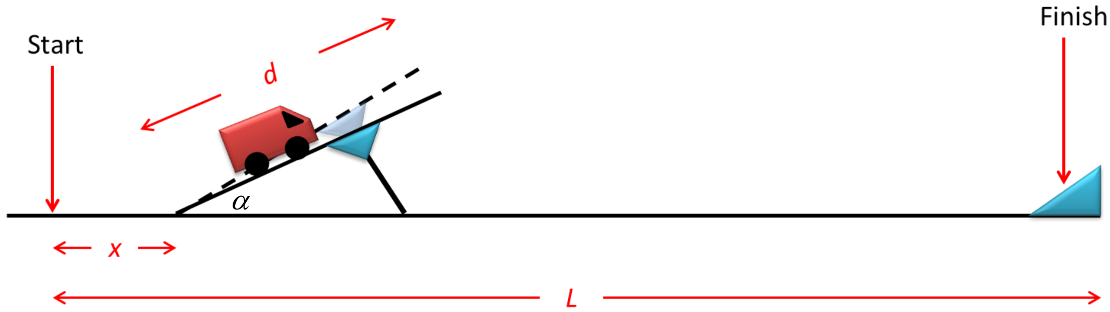
c. Karena percepatan pusat massa dari bola konstan, maka relatif terhadap bidang miring,

$$L = \frac{1}{2}aT^2 \qquad (10) \qquad \text{(3 poin)}$$

jadi kita dapatkan,

$$T = \sqrt{\frac{37L}{15g}\sqrt{2}} \qquad (11) \qquad \text{(2 poin)}$$

7. (**20 poin**) Sebuah mobil akrobatik diatur memiliki percepatan konstan a. Mobil ini akan melewati sebuah tanjakan miring bersudut α untuk kemudian melakukan gerak parabola menuju target. Target berada pada jarak L dari titik awal keberangkatan mobil. Tanjakan berada pada jarak x dari titik awal keberangkatan mobil. Panjang tanjakan adalah d. Saat mobil melewati tanjakan, kemiringan tanjakan berkurang sebesar $\frac{m}{K}$ kali sudut awal, dimana m adalah massa dari mobil dan K adalah suatu konstanta. Percepatan mobil pun berkurang sebesar $g \sin \alpha$ saat melalui tanjakan, dimana α adalah sudut kemiringan antara tanjakan dengan tanah. Mobil dipercepat dari keadaan diam dari garis start. Tentukanlah percepatan yang harus dimiliki oleh mobil agar tepat mencapai garis finish. Anggap mobil adalah partikel titik.



Jawab:

Perubahan kemiringan tanjakan

Kemiringan tanjakan berkurang sebesar $\frac{m}{K}$ kali sudut awal, dengan kata lain untuk mobil bermassa m yang menaiki tanjakan, sudut tanjakan akan berkurang sebesar $\frac{m}{K}\alpha$ sehingga sudut dari tanjakan setelah mobil bermassa m menaiki tanjakan adalah:

$$\alpha' = \left(1 - \frac{m}{K}\right)\alpha \qquad \text{(4 poin)}$$

Perubahan percepatan

Sebelum melewati tanjakan, percepatan mobil adalah a kemudian setelah melewati tanjakan, percepatannya berkurang sebesar $g \sin \alpha'$ dengan kata lain, percepatan mobil saat melewati tanjakan adalah

$$a' = a - g \sin \alpha' \qquad \text{(1 poin)}$$

Daerah I (saat mobil di jalan datar sebelum tanjakan)

$$v_t^{\,2} = v_0^{\,2} + 2aS$$
$$v_t^{\,2} = 0 + 2ax \qquad \text{(2 poin)}$$
$$v_t = \sqrt{2ax}$$

Daerah II (saat mobil menaiki tanjakan)

$$v_t^{\,2} = v_0^{\,2} + 2aS$$
$$v_t^{\,2} = 2ax + 2a'd$$
$$v_t^{\,2} = 2ax + 2\left(a - g\sin\alpha'\right)d \qquad \text{(2 poin)}$$
$$v_t = \sqrt{2a\left(x+d\right) - 2g\sin\alpha' d}$$

Daerah III (saat mobil lepas dari tanjakan dan melakukan gerak parabola)

Gerak parabola, dengan kecepatan awal:

$$v_0 = \sqrt{2a\left(x+d\right) - 2g\sin\alpha'\mathrm{d}}$$
$$v_{0x} = v_0\cos\alpha' \qquad \text{(1 poin)}$$
$$v_{0y} = v_0\sin\alpha'$$

Gerak untuk sumbu-X:

$$L - x - d\cos\alpha' = v_{0x}t$$
$$L - x - d\cos\alpha' = v_0\cos\alpha' t \qquad \text{(2 poin)}$$
$$t = \frac{L - x - d\cos\alpha'}{v_0\cos\alpha'}$$

Gerak untuk sumbu-Y:

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(2 poin)}$$
$$-d\sin\alpha' = v_0\sin\alpha'\left(\frac{L - x - d\cos\alpha'}{v_0\cos\alpha'}\right) - \frac{1}{2}g\frac{\left(L - x - d\cos\alpha'\right)^2}{v_0^2\cos^2\alpha'}$$
$$-d\sin\alpha' = \tan\alpha'\left(L - x - d\cos\alpha'\right) - g\frac{\left(L - x - d\cos\alpha'\right)^2}{2v_0^2\cos^2\alpha'}$$
$$\frac{g\left(L - x - d\cos\alpha'\right)^2}{\left(L - x\right)\sin 2\alpha'} = 2a\left(x+d\right) - 2gd\sin\alpha'$$
$$2a\left(x+d\right) = \frac{g\left(L - x - d\cos\alpha'\right)^2}{\left(L - x\right)\sin 2\alpha'} + 2gd\sin\alpha' \qquad \text{(2 poin)}$$

$$a = \frac{g(L - x - d\cos\alpha')^2}{2(x+d)(L-x)\sin 2\alpha'} + \frac{2gd\sin\alpha'}{(x+d)}$$ (2 poin)

$$a = \frac{g\left(L - x - d\cos\left[\left(1-\frac{m}{K}\right)\alpha\right]\right)^2}{2(x+d)(L-x)\sin\left[2\left(1-\frac{m}{K}\right)\alpha\right]} + \frac{gd\sin\left[\left(1-\frac{m}{K}\right)\alpha\right]}{(x+d)}$$ (2 poin)