

# **KINEMATIKA BINTANG-BINTANG LOKAL BERDASARKAN DATA *HIPPARCOS***

## **TUGAS AKHIR**

Disusun untuk memenuhi syarat kelulusan pada  
Program Sarjana Astronomi Institut Teknologi Bandung

**Tri Laksana**

**NIM 103 99 007**



**PROGRAM STUDI ASTRONOMI  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG**

**2006**



Tugas Akhir ini telah diujikan dalam Sidang Sarjana Program Studi Astronomi

Pada hari Jumat, tanggal 10 Febuari 2006, pukul 13.30–15.00 WIB,

Di hadapan Tim Penguji:

Dr. Moedji Raharto (Ketua Penguji/Pembimbing)

Dr. Suhardja D. Wiramihardja (Penguji I)

Dr. Hakim L. Malasan (Penguji II)

Dr. Mahasena Putra (Penguji III)

Menyetujui,  
Pembimbing

Dr. Moedji Raharto  
NIP 130935678



untuk Ami  
yang pernah berbagi sepenggal ruang-waktu



# Abstrak

Data paralaks dan gerak diri dari sampel bintang-bintang tak bias kinematis yang diambil dari Katalog *Hipparcos* telah dipergunakan untuk menelaah ulang kinematika bintang-bintang lokal deret utama sebagai fungsi dari Indeks Warna ( $B - V$ ).

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa komponen kecepatan dalam arah radial dan vertikal tidak menunjukkan perubahan signifikan terhadap Indeks Warna, sedangkan komponen dalam arah rotasi Galaksi mengikuti hubungan aliran asimetris kecuali untuk bintang yang lebih biru dari  $(B - V) \approx 0.1$ . Diskontinuitas Parenago terlihat jelas dalam pemetaan dispersi kecepatan terhadap  $(B - V)$ : Dispersi kecepatan konstan pada bintang tipe akhir kelas G0 hingga M4, dan menurun dari  $(B - V) \approx 0.61$  ke arah bintang tipe awal. Pemetaan komponen kecepatan terhadap dispersi dilanjutkan dengan ekstrapolasi kecepatan pada dispersi nol akan menghasilkan kecepatan Matahari relatif terhadap LSR yaitu, dalam  $\text{km s}^{-1}$ ,  $U_0 = 9.30 \pm 0.54$  (ke arah Pusat Galaksi),  $V_0 = 5.14 \pm 0.61$  (ke arah rotasi Galaksi), dan  $W_0 = 5.73 \pm 0.55$  (ke arah vertikal).

Dihitung pula tensor dispersi kecepatan  $\sigma^2$  sebagai fungsi dari  $(B - V)$ . Urutan komponen diagonal dari tensor  $\sigma^2$  selalu sama:  $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} > \sigma_{zz}$ . Momen campuran yang melibatkan gerak vertikal,  $\sigma_{xz}^2$  dan  $\sigma_{yz}^2$ , bernilai nol dalam sebagian besar rentang kesalahan, sementara momen pada bidang Galaksi  $\sigma_{xy}^2 \approx (10 \text{ km s}^{-1})^2$  dan independen terhadap  $(B - V)$ . Deviasi verteks berkisar antara  $l_v \approx 28^\circ$  untuk bintang tipe awal, mendekati nol pada  $(B - V) \approx 0.6$ , dan konstan pada  $l_v \approx 7.6^\circ \pm 2.2^\circ$  untuk bintang tipe akhir. Adanya deviasi verteks pada bintang-bintang tipe akhir mengimplikasikan potensial Galaksi bersifat non-aksisimetrik pada radius  $R_0$ . Jika ketidaksimetrian ini disebabkan oleh lengan spiral, maka jarak antar lengan tidak boleh terlalu dekat.

Untuk bintang-bintang yang lebih merah dari  $(B - V) \approx 0.1$ , rasio ketiga sumbu

elipsoid kecepatan adalah  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 \approx 1.7 : 1.3 : 1$ , dengan  $\sigma_1$  meningkat dari  $\sigma_1 \approx 20 \text{ km s}^{-1}$  pada  $(B-V) = 0.29 \text{ mag}$  hingga  $\sigma_1 \approx 39 \text{ km s}^{-1}$  pada diskontinuitas Parenago dan bintang-bintang yang lebih merah. Rasio  $\sigma_3/\sigma_1 \simeq 0.6$  mengimplikasikan peran yang lebih signifikan dari awan molekular raksasa dalam pemanasan piringan Galaksi.

**Kata kunci:** bintang: kinematika – Galaksi: daerah lokal matahari – Galaksi: kinematika dan dinamika – Galaksi: parameter fundamental – Hipparcos



# Abstract

Using the parallaxes and proper motions of a kinematically unbiased sample taken from the *Hipparcos* Catalogue, the kinematics of local main sequence stars as a function of colour index ( $B - V$ ) have been redetermined.

The  $U$  components in the direction of  $\hat{\mathbf{x}}$  (direction to the Galactic Center) and the  $W$  components in the direction of  $\hat{\mathbf{z}}$  (direction to the North Galactic Pole) show no significant changes to colour, while the  $V$  components in the direction of Galactic Rotation follow the asymmetric drift relation, except for stars bluer than  $(B - V) \approx 0.1$ . Parenago's discontinuity is clearly visible in the plot of velocity dispersion against colour: velocity dispersion is independent to colour for late type stars from class G0 to M4 and decreases toward early type stars blueward of  $(B - V) \approx 0.61$ . Plotting the velocity components against dispersion and extrapolating to zero dispersion yields the velocity of the Sun with respect to the LSR, in  $\text{km s}^{-1}$ ,  $U_0 = 9.30 \pm 0.54$  (radially inwards),  $V_0 = 5.14 \pm 0.61$  (rotational direction), and  $W_0 = 5.73 \pm 0.55$  (vertically upwards).

Also redetermined are the velocity dispersion tensor  $\sigma^2$  as a function of colour. The ordering between the diagonal components of the tensor  $\sigma^2$  are always the same:  $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} > \sigma_{zz}$ . The mixed moments involving vertical motion,  $\sigma_{xz}^2$  and  $\sigma_{yz}^2$ , are zero within most of the errors, while mixed moments in the Galactic plane is  $\sigma_{xy}^2 \approx (10 \text{ km s}^{-1})^2$  independently of colour. The vertex deviations are  $l_v \approx 28^\circ$  for early type stars, close to zero at  $(B - V) \approx 0.6$ , and  $l_v \approx 7.6^\circ \pm 2.2^\circ$  for late type stars. The persistence of the vertex deviation to late type stars implies a non-axisymmetric Galactic potential at the solar radius  $R_0$ . If this non-axisymmetry is caused by the spiral arms, they cannot be tightly wound.

For stars redder than  $(B - V) \approx 0.1$ , the ratios of the principal velocity dispersions

are  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 \approx 1.7 : 1.3 : 1$ , with the increase in  $\sigma_1$  with respect to colour is from  $\sigma_1 \approx 20 \text{ km s}^{-1}$  at  $(B - V) = 0.29 \text{ mag}$  to  $\sigma_1 \approx 39 \text{ km s}^{-1}$  at Parenago's discontinuity and redder stars. The ratio  $\sigma_3/\sigma_1 \simeq 0.6$  implies more significant role of giant molecular clouds in heating the Galactic disc.

**Key words:** stars: kinematics – Galaxy: fundamental parameters – Galaxy: kinematics and dynamics – Galaxy: solar neighborhood – Hipparcos

# Prakata

Pembaca yang berbahagia,

Dokumen yang akan Anda baca berikut ini adalah sebuah Tugas Akhir yang saya tulis untuk memperoleh gelar sarjana strata satu. Walaupun dinamakan Tugas Akhir, namun saya menganggapnya sebagai sebuah studi awal tentang kinematika Galaksi kita. Jadi ini bukanlah sebuah akhir namun justru merupakan awalan untuk memasuki riset Fisika Galaksi. Saya berharap Anda para pembaca tidak berhenti sampai di sini, sampai lembar Prakata ini (barangkali Anda hanya sekadar ingin tahu apakah nama Anda dimasukkan pada ucapan terima kasih?), dan melanjutkan membaca hingga halaman-halaman terakhir. Saya berharap pula Anda menikmati membaca dokumen ini sebagaimana saya menikmati menuliskannya, dan merasakan apa yang saya rasakan saat mengerjakan Tugas Akhir ini.

Beberapa hal yang menjadi pembicaraan selama sidang sarjana diharapkan dapat dilakukan dalam pekerjaan-pekerjaan selanjutnya. Koreksi ekstingsi yang dalam pekerjaan ini diabaikan, dapat dimasukkan dalam perhitungan dengan menggunakan model yang saat ini dikembangkan, misalnya model Hakkila, Myers, Stidham, dan Hartmann (1997). Prosedur pemilihan bintang-bintang Deret Utama yang dalam pekerjaan ini menggunakan inspeksi visual, dapat dieksplorasi lebih lanjut dengan menggunakan algoritma yang lebih objektif, misalnya dengan metode *maximum likelihood*. Pekerjaan ini, yang pada awalnya saya anggap sederhana ternyata menyimpan kompleksitasnya sendiri terutama dalam masalah pencuplikan data. Interpretasi data dari sudut pandang dinamika juga menjadi hal yang tak mudah.

Pekerjaan ini menerima bantuan begitu banyak pihak, di tengah-tengah kesendirian saya bersyukur bahwa begitu banyak pihak yang—baik karena tugas profesional, karena

perkawanan, maupun alasan-alasan lain—bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan kontribusi dalam pekerjaan ini, besar maupun kecil! Dr. Moedji Raharto yang bersedia menjadi Pembimbing banyak memberikan makalah-makalah kunci yang menjadi rujukan utama. Nasihat-nasihat beliau tentang pertimbangan-pertimbangan statistik sangat berharga bagi pekerjaan ini, dan menjadi dasar penulisan Bab 3. Saya masih mengingat ucapan beliau saat saya baru memulai pekerjaan ini, “kalau kamu cepat, dalam beberapa minggu juga selesai.” Pekerjaan ini memang tidak selesai dalam beberapa minggu, namun berkat pengawasan ketat Pak Moedji, durasi pengerjaan Tugas Akhir ini tidak berlarut-larut hingga lebih dari 1 semester. Beliau pula lah yang memberikan pijakan tempat di mana harus memulai dan di mana harus mengakhiri. “Banyak yang bisa dieksplorasi dari pekerjaan ini, tapi harus diingat bahwa kamu tidak punya banyak waktu,” demikian selalu nasihat Pak Moedji tatkala saya memberikan laporan dan rencana-rencana selanjutnya. Saya ucapkan terima kasih pula kepada Prof. Dr. Bambang Hidayat atas perhatiannya pada pekerjaan ini, dan atas kesediaannya untuk hadir dalam seminar mahasiswa dan memberikan wawasan-wawasan penting yang memperkaya pekerjaan ini. Pak Bambang juga telah memberikan koreksi-koreksi penting pada *draft* naskah ini, dan saya sadari bahwa ketertarikan pada tema struktur galaksi dimulai dengan keikutsertaan saya pada kuliah Dinamika Sistem Bintang yang diajarkan Pak Bambang. Pesan Pak Bambang yang saya anggap paling penting, untuk selalu mengikuti “*train of thought*” dari sebuah pemikiran, selalu saya ingat dan selalu saya teruskan dalam setiap kesempatan. Tim Penguji Sidang, Dr. Suhardja D. Wiramihardja, Dr. Hakim L. Malasan, dan Dr. Mahasena Putra harus saya ucapkan terima kasih atas masukan-masukannya sebelum dan sesudah sidang. Pak Hardja telah memberikan saran penting untuk membedakan antara proses pemanasan piringan Galaksi dengan proses perlambatan pembentukan bintang yang diakibatkan oleh rotasi diferensial. Beliau pula yang menyarankan agar menemui Pak Moedji jika saya ingin mengerjakan Tugas Akhir ini. Pak Hakim, seperti biasa, selalu memberikan tantangan-tantangan untuk mempertajam pekerjaan ini, terutama untuk menghindari subjektifitas yang terlalu tinggi. Penggunaan metode *maximum likelihood* sebagai ganti inspeksi visual dan beberapa metode lain untuk menggantikan metode histogram adalah saran penting beliau untuk pekerjaan ini. Didikan Pak Hakim yang terkenal keras juga menjadi pengalaman berharga yang tidak saya lu-

pakan: saya bersyukur masih dapat mengikuti kuliah Laboratorium Astronomi terakhir yang diajarkan Pak Hakim, maupun kuliah Pengantar Instrumentasi Astronomi yang memberikan definisi baru dalam istilah “olahraga otak.” Kepada Dr. Mahasena Putra, saya mengucapkan terima kasih atas pencerahannya tentang pertimbangan-pertimbangan statistik dalam penentuan usia bintang, juga dengan perhatian beliau selama pengerjaan Tugas Akhir. “Beres semua? Kapan seminar?” adalah dua pertanyaan yang paling sering diajukan Pak Sena. Nun jauh di Inggris, Walter Dehnen dari Kelompok Fisika Teoritik Universitas Oxford juga perlu saya ucapkan terima kasih karena bersedia meluangkan waktu untuk menjawab surat-surat elektronik saya dan memberikan petunjuk-petunjuk berharga tentang metode inspeksi visual dan kriteria *binning*. Meskipun beliau lupa dengan detail-detail argumentasi yang diberikan dalam makalahnya, namun tanpa ragu beliau bersedia berpikir keras untuk mengingat kembali apa yang pernah ditulisnya. Dan ini dilakukan demi membantu seseorang yang berjarak ribuan kilometer dan baru saja dikenalnya.

Tak lupa saya ucapkan terima kasih kepada kolega-kolega yang mengerjakan bidang serupa: Mas Iqbal Arifyanto atas diskusinya pada saat-saat terakhir menjelang sidang dan atas kesediaannya untuk hadir dalam sidang, juga kepada rekan Hanindyo Kuncarayakti dan Stephanie atas komentar-komentarnya terhadap pekerjaan ini. Pertanyaan dan komentar yang diberikan Dr. Suryadi Siregar pada saat sidang juga menjadi masukan penting bagi saya. Rekan-rekan lain yang hadir pada seminar dan sidang sarjana juga harus saya ucapkan terima kasih, terutama kepada dua orang *Tikukur Boys*: Aji dan Susan(to) yang mau bersusah payah untuk mencoba memahami apa yang saya presentasikan padahal itu bukan bidang yang mereka pahami.

Dari segi ilustrasi dan perwajahan, kontribusi penting dari Prayudi Utomo juga harus diacungi jempol. Sebagian besar ilustrasi pada dokumen ini dikerjakan Yudi, dan perlulah kita semua angkat topi atas ilustrasinya yang detail dan penuh warna (dalam arti harfiah), terlebih lagi ketika membayangkan Yudi mengerjakan ini dengan komputer yang sudah uzur dan *mouse* yang didesain untuk orang kidal—sementara dia sendiri adalah seorang *right-handed*. Perwajahan dokumen ini yang begitu cantik dan konsisten berhutang banyak kepada Dudi Indrasetiadi yang telah mengajarkan saya seluk-beluk  $\text{\LaTeX}$  dan Rukman Nugraha yang merelakan *file-file* Tugas Akhirnya—yang ditulis dalam  $\text{\LaTeX}$ —

untuk saya bongkar dan modifikasi. Tanpa kontribusi dua orang ini, saya harus bekerja dengan *Microsoft Office* yang—terus terang saja—seringkali sangat melelahkan dan membuat frustrasi. Grafik-grafik dalam dokumen ini, yang nampak begitu profesional, dihasilkan oleh GNUPlot dan untuk itu saya berhutang besar kepada Agus Triono PJ yang telah memberikan *source* GNUPlot dan panduan-panduannya. Saya ucapkan terima kasih pula kepada Safwat Assaqa yang telah meluangkan waktunya untuk menghitung Nilai Eigen pada Tabel 5.3. Atas kerja kerasnya yang dilakukan dengan komputernya yang selalu sibuk, Safwat hanya meminta dua imbalan: namanya dimasukkan dalam ucapan terima kasih, dan ditraktir McDonald’s seharga 30 ribu rupiah. Baru satu yang sudah saya lunasi.

Dan yang terakhir, namun tak kalah penting, saya ucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada dosen wali saya, Dr. Dhani Herdiwijaya, atas seluruh bantuan beliau selama 6.5 tahun saya menjadi mahasiswa astronomi. Mulai dari bantuannya pada tahun 2000 saat saya mengerjakan makalah kaderisasi tentang *Stonehenge*, usaha-usaha beliau pada tahun 2004 untuk membantu kasus sarjana muda saya, hingga saran-saran beliau saat perwalian terakhir pada Juli 2005, Pak Dhani selalu menghadapi masalah dengan santai dan kepala dingin. Saya juga berhutang banyak kepada Dr. Cynthia Linaya Radiman, mantan dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, yang pada paruh awal 2004 telah bekerja keras mencarikan solusi bagi kasus sarjana muda saya. Usaha keras Bu Cynthia, yang disebutnya sebagai “sedikit kerja detektif”, adalah usaha mengagumkan yang menunjukkan objektifitas beliau dalam menangani masalah. Tak lupa saya ucapkan terima kasih pula kepada komunitas mahasiswa astronomi bernama Himastron yang persahabatannya—meminjam lirik Sindentosca—*begitu hangat mengalahkan sinar matahari*. Tahun-tahun yang saya habiskan di bawah naungan Himastron, dengan kehangatan persahabatannya dan terkadang dinginnya tembok pertikaian, telah menjadi wadah pembentukan karakter positif yang besar pengaruhnya bagi saya. Bolehlah kita ingat apa yang telah dinyanyikan Sindentosca: *Persahabatan bagaikan kepompong, mengubah ulat menjadi kupu-kupu, hal yang tak mudah berubah jadi indah*. Hidup memang keras dan penuh rintangan, namun berpikir bahwa kita sendirian adalah suatu hal yang amat berbahaya.

Saya berharap bahwa di antara mahasiswa-mahasiswa astronomi generasi selanjutnya, ada yang tertarik untuk mengeksplorasi lebih lanjut pekerjaan ini. Mudah-mudahan

dokumen ini dapat berguna bagi Anda yang tertarik untuk mengambil tema tugas akhir dalam bidang ini. *Code* Fortran dan rujukan-rujukan yang terkait dengan pekerjaan ini saya sertakan pula dalam sebuah cakram padat pada sampul belakang dokumen ini, untuk memberikan pijakan bagi pekerjaan-pekerjaan selanjutnya. Koreksi dan pengembangan lebih lanjut atas pekerjaan ini akan sangat berharga.

Bandung, 19 Maret 2006

Tri Laksana





# Daftar Isi

Abstrak	i
Abstract	iii
Prakata	v
Daftar Gambar	xiii
Daftar Tabel	xvii
<b>1 Pendahuluan</b>	<b>1</b>
<b>2 Fondasi Teoritis</b>	<b>7</b>
2.1 Gerak Bintang . . . . .	7
2.2 Kerangka Acuan dan Standar Diam . . . . .	9
2.2.1 Kerangka Acuan Heliosentrik . . . . .	9
2.2.2 Standar Diam Galaktik . . . . .	9
2.2.3 Standar Diam Lokal dan Kecepatan Diri . . . . .	10
2.3 Elipsoid Kecepatan . . . . .	12
2.4 Dinamika Galaksi . . . . .	14
2.4.1 Orbit dalam Potensial Aksisimetrik . . . . .	14
2.4.2 Aliran Asimetris . . . . .	20
2.4.3 Pemanasan Piringan Galaksi . . . . .	23
<b>3 Seleksi Sampel</b>	<b>25</b>
3.1 Masalah-Masalah Pencuplikan dan Deskripsi Katalog <i>Hipparcos</i> . . . . .	25

3.2	Seleksi Data . . . . .	27
3.3	Deskripsi Sampel . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Metode Analisis</b>	<b>39</b>
4.1	Persamaan Proyeksi . . . . .	39
4.2	Gerak Rata-Rata . . . . .	40
4.3	Tensor Dispersi Kecepatan . . . . .	41
4.4	Galat . . . . .	42
4.4.1	Derau Poisson . . . . .	42
4.4.2	Galat Acak . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Hasil Perhitungan</b>	<b>44</b>
5.1	Gerak Lokal Matahari . . . . .	44
5.2	Gerak Matahari Relatif terhadap LSR . . . . .	46
5.3	Tensor Dispersi Kecepatan . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Diskusi</b>	<b>54</b>
	<b>Daftar Pustaka</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Transformasi Koordinat</b>	<b>61</b>
<b>B</b>	<b>Transformasi Vektor Kecepatan Bintang</b>	<b>64</b>
<b>C</b>	<b>Persamaan Boltzmann Tanpa Tumbukan dan Persamaan Jeans</b>	<b>66</b>
<b>D</b>	<b>Penurunan Derau Poisson pada <math>\langle v \rangle</math>, <math>S^2</math>, dan <math>\langle s \rangle</math></b>	<b>71</b>
<b>E</b>	<b>Perambatan Kesalahan</b>	<b>73</b>
<b>F</b>	<b>Regresi Linear Terbobot</b>	<b>75</b>
<b>G</b>	<b>Bagan Alir Program dan <i>Code</i> FORTRAN dalam Tugas Akhir ini</b>	<b>78</b>
G.1	Bagan Alir dan Penjelasan <code>bacadata.f</code> . . . . .	78
G.2	Bagan Alir dan Penjelasan <code>veldisp.f</code> . . . . .	85

# Daftar Gambar

2.1	Gerak bintang relatif terhadap pengamat dapat dibagi menjadi dua komponen yang saling tegak lurus yaitu kecepatan radial $v_R$ dan kecepatan tangensial $v_T$ . $d$ adalah jarak bintang terhadap pengamat, $\mu$ adalah gerak diri, dan $v_S$ adalah kecepatan ruang ( <i>space velocity</i> ) yaitu resultan dari $v_R$ dan $v_T$ . . . . .	8
2.2	Standar Diam Fundamental adalah standar diam yang mengacu pada Pusat Galaksi Bima Sakti. Vektor kecepatan sebuah bintang yang berada pada jarak $R$ dari Pusat Galaksi dapat dinyatakan dalam komponen koordinat silinder: komponen arah radial yaitu $v_R$ (positif bila menjauhi Pusat Galaksi), komponen arah tangensial $v_\phi$ (positif bila searah dengan rotasi Galaksi), dan komponen $v_z$ ke arah Kutub Galaksi (positif bila searah dengan Kutub Utara Galaksi). Pada gambar ini, panjang vektor diperbesar untuk memberikan penekanan pada arah. . . . .	10
2.3	Elipsoid kecepatan Schwarzschild yang mendeskripsikan distribusi kecepatan dalam ruang kecepatan. Sumber: Trumpler dan Weaver, 1953 . . . . .	13
2.4	Sebuah orbit Kepler berbentuk elips (kurva bergaris putus-putus) dapat didekati dengan baik oleh gerak episiklus, yaitu bila Planet bergerak dalam orbit elips dan frekuensi $\kappa$ mengelilingi sebuah titik pusat, sementara titik pusat tersebut bergerak mengelilingi matahari dengan kecepatan sudut $\Omega$ dalam orbit lingkaran (kurva titik-titik). Gerak episiklus ditandai oleh garis tegas. Sumber: Binney dan Tremaine, 1987 . . . . .	19

2.5	Bintang yang memulai orbitnya pada titik $R_2$ akan bergerak dengan orbit lingkaran dengan kecepatan orbit $v_\phi(R_0) \equiv v_c(R_0)$ . Pada saat mencapai titik $R_0$ bintang akan bergerak dengan kecepatan yang sama dengan kecepatan titik LSR. Bintang yang memulai orbitnya pada titik $R_1$ akan mencapai titik apogalaktikum pada $R_0$ . Kecepatan orbit pada titik ini adalah $v_\phi(R_0) < v_c(R_0)$ , sehingga dengan demikian bintang-bintang ini tertinggal di belakang LSR. Bintang yang memulai orbitnya pada titik $R_3$ akan mencapai titik perigalaktikum pada $R_0$ , sehingga kecepatannya adalah $v_\phi(R_0) > v_c(R_0)$ . Bintang-bintang ini bergerak lebih cepat daripada kecepatan LSR. . . . .	22
3.1	Distribusi gerak diri dari sampel 5610 bintang yang dipilih Binney <i>et al.</i> [5] (histogram atas) dan 1072 bintang dari sampel tersebut yang memiliki data kecepatan radial (histogram bawah, diraster). Sumber: Binney <i>et al.</i> , 1997 . . . . .	26
3.2	Bentuk kurva distribusi galat relatif kecepatan tangensial $v_T$ , bila kita menyeleksi bintang <i>Hipparcos</i> dengan $\sigma_\pi/\pi$ kurang dari (a) 0.1, (b) 0.2, (c) 0.3, (d) 0.4, (e) 0.5, dan (f) 0.6. Semakin besar toleransi $\sigma_\pi/\pi$ , kurva distribusi semakin menunjukkan kecondongan distribusi ke arah $\sigma_{v_T}/v_T \approx \sigma_\pi/\pi$ . . . . .	28
3.3	<b>Kiri:</b> Diagram Hertzsprung-Russell dari 16 045 bintang <i>Hipparcos</i> dengan $\sigma_\pi/\pi \leq 0.1$ . Sebagai pembanding juga dipetakan titik-titik yang mendefinisikan Deret Utama dan Deret Utama Berusia Nol atau ZAMS ( <i>Zero Age Main Sequence</i> ). <b>Kanan:</b> Sama dengan gambar kiri, namun untuk 13 633 bintang tunggal deret utama yang telah memenuhi syarat . . . . .	29
3.4	Kontur distribusi bintang dalam Koordinat Galaktik $l$ dan $b$ . Ukuran <i>bin</i> adalah $2^\circ \times 2^\circ$ . . . . .	33
3.5	Histogram distribusi jarak. Ukuran <i>bin</i> adalah 5 pc . . . . .	34

3.6 **Atas:** Histogram distribusi Indeks Warna ( $B - V$ ) untuk sampel akhir dalam Tugas Akhir ini. Ukuran *bin* adalah 0.02 mag. **Bawah:** Histogram distribusi Indeks Warna ( $B - V$ ) untuk seluruh data *Hipparcos*. Sumber: Katalog *Hipparcos*. . . . . 36

3.7 Histogram distribusi  $\sigma_{(B-V)}$ . Ukuran *bin* adalah 0.002 mag. . . . . 37

3.8 Pemetaan vektor rata-rata kecepatan tangensial yang diproyeksikan pada bidang  $xy$ . Titik asal koordinat adalah matahari; sumbu  $X$  positif berimpit dengan arah Pusat Galaksi, ( $l = 0, b = 0$ ); dan sumbu  $Y$  positif berimpit dengan arah Rotasi Galaksi, ( $l = 0, b = 90^\circ$ ). Ukuran *bin* adalah  $5 \text{ pc} \times 5 \text{ pc}$ , dan vektor diperbesar untuk menunjukkan arah gerakannya. . . . . 38

3.9 Distribusi ekses  $\mu_{l*}$  positif terhadap  $\mu_{l*}$  negatif, dengan ukuran *bin* =  $10^\circ$  . 38

5.1 Komponen kecepatan  $U_\odot$ ,  $V_\odot$ ,  $W_\odot$ , dan dispersi kecepatan  $S$  relatif terhadap indeks warna ( $B - V$ ). Garis merah sebelah kiri pada  $(B - V) = 0.1$  menandai daerah di mana bintang-bintang yang lebih biru dari garis tersebut tak lagi mengikuti hubungan aliran asimetris, sementara garis merah sebelah kanan pada  $(B - V) = 0.61$  menandai diskontinuitas Parenago di mana kecepatan bintang-bintang yang lebih merah dari garis tersebut tak lagi bergantung pada Indeks Warna . . . . . 45

5.2 Kebergantungan  $U_\odot$ ,  $V_\odot$ , dan  $W_\odot$  terhadap  $S^2$ . Garis lurus merupakan *fitting* yang dilakukan dengan metode kuadrat terkecil. . . . . 46

5.3 Dispersi kecepatan dalam *bin* ( $B - V$ ) yang berbeda-beda. Grafik teratas menunjukkan dispersi kecepatan dalam 3 sumbu utama dan kecepatan rata-rata dalam arah rotasi (nilai negatif mengimplikasikan ketertinggalan terhadap kecepatan rotasi LSR). Tiga grafik terbawah memetakan  $\sigma_{ij} = \text{sign}(\sigma_{ij}^2) |\sigma_{ij}^2|^{1/2}$ . . . . . 50

5.4 Pemetaan deviasi verteks  $l_v$  terhadap Indeks Warna ( $B - V$ ) . . . . . 53

A.1 **Kiri:** Posisi sebuah bintang dalam Koordinat Galaktik dan Koordinat Ekuatorial. **Kanan:** Detail segitiga bola  $\text{NGP} - \hat{\text{NCP}} - S$  . . . . . 62

A.2 Transformasi komponen gerak diri ( $\mu_{\alpha*}, \mu_\delta$ ) menjadi ( $\mu_{l*}, \mu_b$ ) dilakukan dengan menjumlahkan proyeksi ( $\mu_{\alpha*}, \mu_\delta$ ) pada sumbu  $l$  dan  $b$  . . . . . 63

B.1	Sebuah bintang dalam arah $(l, b)$ dan jarak $d$ , dengan vektor kecepatan $\mathbf{v}_s = (v_R, v_l, v_b)$ . . . . .	65
-----	---	----

## Daftar Tabel

5.1	Hasil perhitungan komponen kecepatan $U_{\odot}$ , $V_{\odot}$ , $W_{\odot}$ , kecepatan gerak $S_{\odot}$ , dispersi $S^2$ dan koordinat apex $(l_A, b_A)$ untuk setiap <i>bin</i> . Ditunjukkan pula parameter statistik setiap <i>bin</i> yaitu nilai minimal dan maksimal ( $B - V$ ) dari setiap <i>bin</i> , titik tengah, deviasi standar, lebar <i>bin</i> dan jumlah data di dalam setiap <i>bin</i> . . . . .	51
5.2	Dispersi $\sigma_{xx}$ , $\sigma_{yy}$ , $\sigma_{zz}$ , momen campuran $\sigma'_{xy}$ , $\sigma'_{xz}$ , $\sigma'_{yz}$ , dan kecepatan rata-rata dalam arah rotasi $\langle v_{\phi} \rangle$ untuk setiap <i>bin</i> (Nomor 1 hingga 10) dan seluruh bintang yang telah melewati Diskontinuitas Parenago (baris terbawah). Diberikan juga parameter statistik setiap <i>bin</i> yaitu nilai maksimal dan minimal, titik tengah, deviasi standar, lebar <i>bin</i> , dan jumlah data di dalam <i>bin</i> . . . . .	52
5.3	$\sigma_1$ , $\sigma_2$ , $\sigma_3$ masing-masing adalah akar nilai eigen terbesar, menengah, dan terkecil dari tensor dispersi kecepatan $\sigma^2$ untuk setiap <i>bin</i> (Nomor 1 hingga 10) dan seluruh bintang yang telah melewati Diskontinuitas Parenago (baris terbawah). $l_v$ adalah deviasi verteks. Satuan adalah $\text{km sec}^{-1}$ untuk $\sigma_i$ dan derajat untuk $l_v$ . Parameter statistik setiap <i>bin</i> dapat dilihat pada Tabel 5.2. . . . .	53





*“Again it was Halley who, in 1718, comparing modern results for the latitudes of Aldebaran, Sirius, and Arcturus with the data of Ptolemy, completed by those of Hipparchus and Timocharis, found that they now stood half a degree farther south than they should according to the ancient data.*

*...So the so-called ‘fixed stars’ did not occupy a fixed position in the heavens; they had their proper motion in the celestial sphere, hence also in space. This unexpected result provided a new aspect of the world. Here was a new reason for observing the stars again and again, and more and more accurately.”*

*–Anton Pannekoek, 1951, A History of Astronomy*



# Bab 1

## Pendahuluan

Bintang-bintang yang nampak oleh mata telanjang—dan juga yang nampak oleh mata yang dibantu teleskop—membentuk sebuah sistem yang bernama galaksi. Galaksi terdiri atas berbagai bintang yang bersinar dengan energinya sendiri, dan material tak bersinar yang berada dalam ruang antar bintang. Kedua objek ini, bintang dan materi antar bintang, adalah dua konstituen utama dalam Galaksi. Hasil dari telaah cacah bintang menunjukkan bahwa Galaksi—dan juga daerah lokal matahari—terbagi-bagi atas beberapa kelompok populasi bintang yang berbeda-beda baik komposisi kimia maupun distribusi spasialnya.

Sebagian besar konstituen Galaksi bergerak mengitari sebuah titik pusat dalam bidang orbit yang datar (menyerupai piringan). Dengan kata lain, Galaksi Bima Sakti berotasi dengan sumbu rotasi yang tegak lurus bidang galaksi. Meskipun setiap objek individu dalam sistem ini turut ambil bagian dalam gerak rotasi umum, tetapi mereka juga memiliki kecepatan dirinya (*peculiar velocity*) masing-masing, baik acak maupun tak acak.

Sebuah gambaran menyeluruh tentang sistem Galaksi kita dapat diberikan oleh fungsi frekuensi

$$f(x, y, z, U, V, W, M, S), \tag{1.1}$$

yang mengandung delapan variabel deskriptif yang masing-masing dapat saling berkorelasi (Trumpler & Weaver, 1953). Persamaan ini menggambarkan distribusi bintang menurut distribusi spasialnya dalam koordinat  $x, y, z$  yang berpusat pada matahari, menurut kecepatan diri dalam sumbu  $U, V, W$  yang masing-masing searah dengan arah sumbu ko-

ordinat  $x, y, z$ , menurut magnitudo mutlak  $M$ , dan menurut kelas spektrum  $S$ .

Namun, berbagai kesulitan menghambat kita—sebagai pengamat—dalam memproses data untuk memperoleh hukum distribusi Galaksi secara menyeluruh. Posisi Matahari di pinggir Galaksi harus kita terima sebagai sebuah realitas yang membuat kita tak dapat mengamati sebagian besar porsi bintang dalam Galaksi: hanya sejumlah kecil bintang saja yang dapat kita jadikan sampel. Kedelapan variabel deskriptif dalam Persamaan 1.1 pun tidak semuanya dapat kita amati, hanya tipe spektrum dan komponen kecepatan yang langsung dapat diperoleh dari pengamatan, sementara posisi  $(x, y, z)$  dari sebuah bintang bergantung pada paralaks bintang  $\pi$  dan posisinya dalam koordinat galaktik  $(l, b)$ , dan komponen kecepatan  $(U, V, W)$  bergantung pada empat variabel yang dapat langsung diamati: kecepatan radial  $v_R$ , paralaks  $\pi$ , dan komponen kecepatan tangensial  $\mu_{l^*}$  dan  $\mu_b$ . Variabel-variabel yang langsung terukur ini juga memiliki kesalahan pengukuran yang dapat merambat ke dalam variabel deskriptif. Perambatan kesalahan ini merupakan salah satu faktor yang perlu dicermati. Materi antar bintang yang mengisi ruang antara bintang-bintang juga menjadi faktor dalam pengukuran magnitudo: cahaya bintang yang melewati materi antar bintang tersebut akan nampak lebih merah dari seharusnya karena sebagian besar komponen cahaya dalam panjang gelombang biru akan terhamburkan. Oleh karena itu hukum ekstingsi oleh materi antar bintang menjadi sebuah fungsi yang perlu diketahui.

Bila melihat masalah-masalah kelengkapan data yang dihadapi oleh astronom yang bekerja di bidang statistika bintang ini, maka untuk saat ini tidak mungkin memperoleh penyelesaian atas hukum distribusi bintang dalam Galaksi secara menyeluruh. Penentuan fungsi seperti ini adalah sasaran jangka panjang yang jauh di luar jangkauan astronomi kontemporer. Namun dengan keterbatasan data ini, solusi parsial masih dimungkinkan dengan menelaah kelompok bintang dalam daerah tertentu dan juga dalam variabel-variabel deskriptif tertentu: distribusi spasialnya saja, tipe spektralnya saja, atau kecepatannya saja.

Disinilah telaah kinematika bintang-bintang lokal berguna sebagai pembatasan spasial maupun variabel deskriptif. Daerah lokal matahari dapat dianggap sebagai daerah di mana bintang-bintang terdistribusi secara isotropik dan berpusat pada matahari dengan titik koordinat  $x = 0$ ,  $y = 0$ , dan  $z = 0$ . Deskripsi statistik dari daerah lokal ini diberikan

sebagai fungsi distribusi

$$f(U, V, W, M, S). \quad (1.2)$$

Ini merupakan solusi parsial yang berkontribusi pada persoalan distribusi bintang dalam Galaksi secara umum. Ada beberapa keuntungan yang bisa diperoleh dalam pembatasan ini, yaitu masalah ketelitian dan kelengkapan. Bintang-bintang di sekitar matahari sudah diteliti dan diamati secara lebih komprehensif sehingga variabel-variabel deskriptif maupun teramati sudah diukur dengan akurat sehingga meminimalkan persoalan-persoalan dalam hal ketelitian. Bintang-bintang yang redup hingga magnitudo tertentu juga telah diukur hingga sampel terpilih tidak bias pada bintang-bintang yang terang saja. Telaah bintang-bintang dekat Matahari juga dapat mengabaikan efek pemerahan oleh materi antar bintang dan efek rotasi diferensial Galaksi. Dalam Tugas Akhir ini, daerah lokal matahari didefinisikan sebagai jarak  $r$  dari pusat sebuah volume bola yang mencakup  $> 90\%$  sampel yang telah memenuhi kriteria akurasi tertentu (*e.g* galat relatif paralaks  $\sigma(\pi)/\pi \leq 0.10$ ), dengan matahari berada pada pusat bola tersebut.

Deskripsi statistik kinematika bintang-bintang lokal memiliki dua tujuan yaitu 1) penentuan gerak lokal matahari—kecepatan diri matahari relatif terhadap suatu standar diam—dan 2) studi tentang dispersi kecepatan bintang-bintang lokal. Parameter yang menggambarkan distribusi kecepatan adalah dispersi kecepatan tersebut yaitu rata-rata dari kuadrat penyimpangan kecepatan bintang terhadap kecepatan rata-ratanya:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\langle \mathbf{U} \rangle) &= \langle (\mathbf{U} - \langle \mathbf{U} \rangle)^2 \rangle, \\ \sigma^2(\langle \mathbf{V} \rangle) &= \langle (\mathbf{V} - \langle \mathbf{V} \rangle)^2 \rangle, \\ \sigma^2(\langle \mathbf{W} \rangle) &= \langle (\mathbf{W} - \langle \mathbf{W} \rangle)^2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pengetahuan mengenai dua aspek kinematika ini, gerak lokal matahari dan distribusi kecepatan, dapat memberikan petunjuk tentang dinamika, struktur, dan evolusi Galaksi.

Pada tahun 1904, berdasarkan studi gerak diri, Jacobus Cornelius Kapteyn [18] menyimpulkan bahwa kecepatan diri bintang-bintang terdekat di sekitar matahari tidak memiliki distribusi yang sama pada segala arah. Kapteyn menginterpretasikan kenyataan ini melalui hipotesisnya yang disebut hipotesis dua aliran (*two star stream hypothesis*) yang menyatakan bahwa

1. Bintang-bintang di sekitar matahari merupakan campuran dari dua jenis populasi.
2. Kedua subpopulasi memiliki gerak rata-rata, relatif terhadap matahari, yang berbeda. Gerak ini disebut juga “aliran.”
3. Distribusi kecepatan bintang-bintang relatif terhadap kecepatan rata-rata aliran tersebut mengikuti Fungsi Distribusi Maxwell.

Tiga tahun selanjutnya, tahun 1907, Karl Schwarzschild menunjukkan bahwa distribusi yang asimetris pada tiga arah tersebut juga dapat dideskripsikan melalui distribusi elipsoid, yaitu melalui fungsi distribusi Gaussian dengan dispersi berbeda pada tiga arah sumbu elipsoid.

Dikaitkan dengan struktur Galaksi, hipotesis elipsoidal Schwarzschild lebih unggul. Jika memang bintang-bintang di sekitar matahari terdiri atas dua jenis populasi yang saling bercampur, maka kita dapat mengharapkan bahwa kedua populasi tersebut juga akan menunjukkan perbedaan penting misalnya perbedaan luminositas atau tipe spektrum, namun perbedaan seperti itu tidak ditemukan [28]. Di satu sisi, ketiga sumbu dalam elipsoid kecepatan Schwarzschild menunjukkan hubungan yang kuat dengan struktur dan dinamika Galaksi. Sumbu terpanjang  $\sigma_1$  menunjuk kurang lebih pada arah pusat Galaksi, sementara sumbu terkecil  $\sigma_3$  pada umumnya mengarah ke Kutub Utara Galaksi.<sup>1</sup> Teori rotasi galaksi, pada akhirnya, berhasil menjelaskan makna fisis dari hipotesis elipsoidal dan menunjukkan hubungan antara distribusi kecepatan bintang-bintang lokal dengan distribusi elemen orbitnya.<sup>2</sup> Sebagai model statistik yang menggambarkan karakteristik distribusi kecepatan bintang-bintang lokal, hipotesis elipsoidal lebih sukses daripada hipotesis dua aliran. Oleh karena itu, dalam Tugas Akhir ini, distribusi kecepatan diri akan dideskripsikan dengan model elipsoid kecepatan.

Pada tahun 1950an, beberapa studi yang dilakukan Parenago (1950), Nancy Roman (1950, 1952), dan lain-lain menunjukkan adanya kebergantungan sistematis antara

---

<sup>1</sup>Pada tahun 1907, saat Schwarzschild mendeskripsikan elipsoid kecepatan, arah Pusat Galaksi belum ditentukan hingga publikasi hasil pengamatan Shapley pada tahun 1919. Dengan demikian kenyataan bahwa arah  $\sigma_1$  searah dengan Pusat Galaksi dan arah  $\sigma_3$  searah dengan Kutub Utara Galaksi baru disadari setelah publikasi Shapley.

<sup>2</sup>Makna fisis ini baru diketahui pada tahun 1920an setelah Gustav Strömberg, Bertil Lindblad dan Jan Hendrik Oort merampungkan teori dinamika galaksi

kinematika bintang dengan tipe spektrum bintang: kelompok bintang yang lebih muda memiliki dispersi kecepatan yang lebih rendah dan kecepatan rotasi galaksi yang lebih tinggi daripada kelompok bintang yang lebih tua.<sup>3</sup> Selanjutnya Spitzer dan Schwarzschild (1953), Barbanis dan Woltjer (1967), dan Wielen (1977) menjelaskan korelasi sebagai ini akibat dari hamburan bintang oleh awan molekul raksasa atau oleh lengan spiral Galaksi, sebuah fenomena yang disebut “pemanasan”.<sup>4</sup> Kini, deskripsi yang sudah mapan mengenai evolusi kinematika bintang di dalam cakram Galaksi adalah bahwa sebuah bintang dilahirkan dalam sebuah gugus berdispersi rendah dari awan yang bergerak dalam orbit melingkar mengelilingi Pusat Galaksi. Seiring dengan waktu, piringan Galaksi memanaskan dan dispersi kecepatan kelompok bintang tersebut bertambah dan kecepatan rata-ratanya semakin tertinggal dari kecepatan orbit yang bergerak melingkar dalam radius Galaktik yang sama [13]. Dengan demikian karakter distribusi kecepatan bintang-bintang lokal adalah elipsoid kecepatan yang titik pusat, ukuran sumbu, dan orientasinya bervariasi sebanding dengan usianya (dan konsekuensinya juga bervariasi dengan indeks warna).

Katalog *Hipparcos* ESA SP-1200 memberikan kesempatan untuk menghitung ulang parameter-parameter kinematika bintang-bintang lokal, karena dalam katalog ini tersedia data paralaks dan gerak diri dengan cakupan seluruh langit dan ketelitian hingga beberapa milidetikbusur. Dari data Katalog ini dapat diperoleh sampel bintang-bintang yang bebas dari bias kinematik<sup>5</sup> yang dalam studi-studi sebelumnya menjadi masalah. Proses seleksi dan perhitungan dalam tugas akhir ini sebagian besar bersandar pada argumentasi dan prosedur yang dijelaskan oleh Dehnen dan Binney (1998). Tujuan akhir dari pekerjaan ini adalah menghasilkan parameter-parameter yang menggambarkan kinematika bintang-bintang lokal—yaitu gerak lokal matahari dan dispersi kecepatannya—dan membandingkannya dengan hasil-hasil terdahulu serta melakukan analisis pada hasil yang diperoleh.

---

<sup>3</sup>Nancy Roman pada waktu itu menunjukkan bahwa bintang-bintang bergaris kuat (*strong-lined stars*) memiliki dispersi kecepatan yang lebih rendah daripada bintang-bintang bergaris lemah (*weak-lined stars*). Yang dimaksud garis lemah maupun garis kuat di sini adalah kekuatan dari garis serapan oleh unsur-unsur metal, yaitu unsur-unsur kimia yang lebih berat dari Helium.

<sup>4</sup>Lebih lanjut mengenai “pemanasan” akan dibahas pada Bab 2.

<sup>5</sup>Contoh dari bias kinematik adalah sampel yang hanya terdiri dari bintang-bintang dengan gerak diri yang besar, karena keterbatasan instrumen dalam mengukur gerak diri yang kecil.

Dalam bab selanjutnya, Bab 2, akan dibahas teori-teori dasar mengenai kinematika Galaksi di antaranya pembahasan mengenai gerak bintang menurut kerangka acuan pengamat di Bumi, sistem koordinat heliosentrik dan standar diam, serta hipotesis elipsoid kecepatan dan teori dinamika Galaksi. Dalam Bab 3 akan dibahas masalah-masalah dan kriteria pencuplikan serta deskripsi mengenai Katalog *Hipparcos* dan sampel yang telah diseleksi, selanjutnya Bab 4 akan menjelaskan metode yang digunakan dalam menentukan aspek-aspek kinematika bintang, Bab 5 menampilkan hasilnya, dan hasil tersebut akan didiskusikan pada Bab 6.



## Bab 2

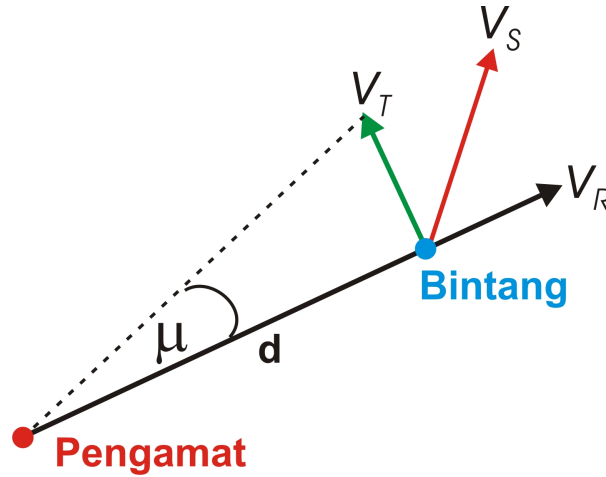
# Fondasi Teoritis

### 2.1 Gerak Bintang

Gerak sebuah bintang relatif terhadap matahari dapat ditentukan dengan mengamati *kecepatan radial*  $v_R$  dan *kecepatan tangensial*  $v_T$  bintang tersebut. Kecepatan radial adalah kecepatan dalam arah garis pandang pengamat, sementara kecepatan tangensial adalah kecepatan dalam arah tangensial yaitu arah yang tegak lurus garis pandang pengamat (Gambar 2.1). Kecepatan radial dapat ditentukan melalui pengamatan pergeseran Doppler dari spektrogram sebuah bintang, sementara kecepatan tangensial membutuhkan informasi gerak diri (*proper motion*)  $\mu$  dan jarak  $d$  sebuah bintang. Jarak bintang (dalam parsek, pc) dapat diketahui bila sudut paralaks bintang  $\pi$  (dalam detik busur) tersebut diketahui, melalui hubungan

$$d(\text{pc}) = \frac{1}{\pi(\text{''})}. \quad (2.1)$$

Gerak diri  $\mu$  adalah perubahan koordinat bintang dalam rentang waktu tertentu, pada umumnya diukur dalam milidetikbusur per tahun ( $\text{mas yr}^{-1}$ ). Dalam koordinat ekuatorial, gerak diri dapat dibagi ke dalam komponen gerak diri dalam arah  $\alpha$  dan  $\delta$  yaitu  $\mu_\alpha$  dan  $\mu_\delta$ .  $\mu_\alpha$  diukur sepanjang lingkaran besar ekuator langit, sementara  $\mu_\delta$  diukur sepanjang garis deklinasi. Namun, komponen gerak diri yang digunakan dalam perhitungan adalah  $\mu_{\alpha*} = \mu_\alpha \cos \delta$ , yaitu gerak diri yang diukur sepanjang lingkaran kecil yang sejajar ekuator langit pada deklinasi  $\delta$ . Dengan demikian gerak diri total (panjang vektor gerak



**Gambar 2.1:** Gerak bintang relatif terhadap pengamat dapat dibagi menjadi dua komponen yang saling tegak lurus yaitu kecepatan radial  $v_R$  dan kecepatan tangensial  $v_T$ .  $d$  adalah jarak bintang terhadap pengamat,  $\mu$  adalah gerak diri, dan  $v_S$  adalah kecepatan ruang (*space velocity*) yaitu resultan dari  $v_R$  dan  $v_T$ .

diri) adalah

$$\mu = (\mu_{\alpha^*}^2 + \mu_{\delta}^2)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Dalam Tugas Akhir ini penulis bekerja dalam Koordinat Galaktik, sementara posisi dan gerak bintang dalam Katalog *Hipparcos* dideskripsikan dalam sistem Koordinat Ekuatorial. Oleh karena itu setiap koordinat dan gerak diri objek yaitu  $(\alpha, \delta, \mu_{\alpha^*}, \mu_{\delta})$  terlebih dahulu ditransformasikan ke dalam Sistem Koordinat Galaktik melalui kaidah-kaidah yang dijelaskan dalam Lampiran A, sehingga diperoleh  $(l, b, \mu_{l^*}, \mu_b)$ .

Kecepatan Tangensial dalam arah bujur galaktik  $l$  dan lintang galaktik  $b$  masing-masing dapat dihitung melalui

$$v_l = A \frac{\mu_{l^*}}{\pi}, \quad (2.3)$$

$$v_b = A \frac{\mu_b}{\pi}, \quad (2.4)$$

dengan  $A = 4.740 \text{ km yr s}^{-1}$  (kilometer tahun per detik). Bila kedua komponen kecepatan ini digabungkan dengan kecepatan radial  $v_R$ , diperoleh vektor kecepatan heliosentrik bintang—gerak bintang relatif terhadap matahari—dalam koordinat bola yaitu

$\mathbf{v}_s \equiv (v_R, v_l, v_b)$ . Dengan demikian kecepatan ruang (*space velocity*) heliosentrik bintang adalah

$$v_S \equiv \|\mathbf{v}_s\| = (v_R^2 + v_l^2 + v_b^2)^{1/2}. \quad (2.5)$$

## 2.2 Kerangka Acuan dan Standar Diam

### 2.2.1 Kerangka Acuan Heliosentrik

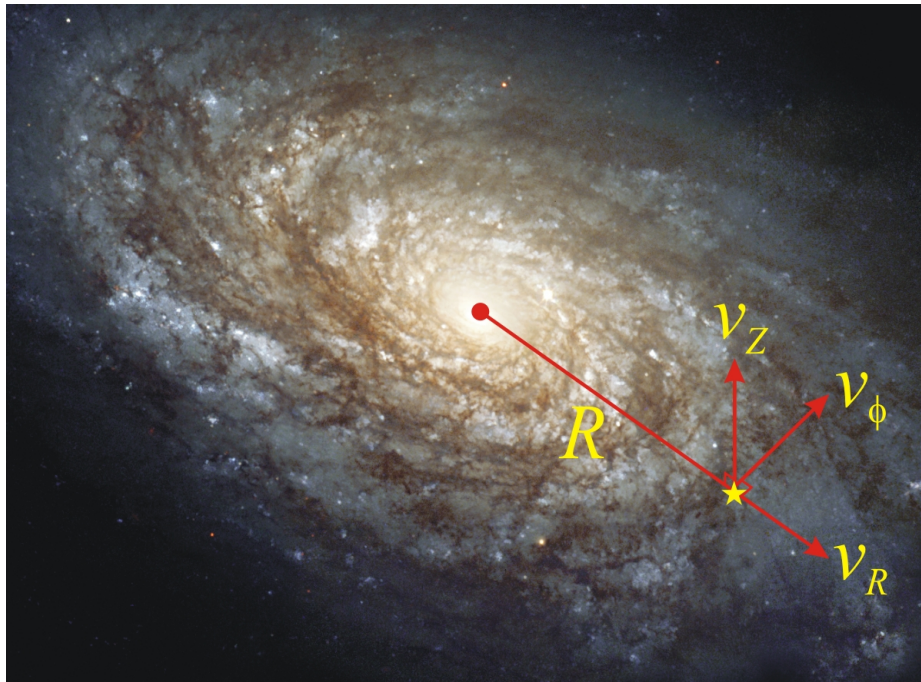
Karena gerak yang kita amati merupakan gerak relatif terhadap matahari, maka kita dapat mendefinisikan sebuah sistem koordinat Kartesian dengan titik acuan pada matahari. Sumbu  $\hat{\mathbf{x}}$  positif berimpit dengan arah  $l = 0^\circ$  dan  $b = 0^\circ$  (arah pusat Galaksi), sumbu  $\hat{\mathbf{y}}$  positif dengan  $l = 90^\circ$  dan  $b = 0^\circ$  (arah rotasi Galaksi), dan sumbu  $\hat{\mathbf{z}}$  dengan  $b = 90^\circ$  (arah Kutub Utara Galaksi). Dalam kerangka acuan ini gerak heliosentrik sebuah bintang dapat dinyatakan sebagai vektor  $\mathbf{v}$  yang memiliki 3 komponen kecepatan dalam arah  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$ , dan  $\hat{\mathbf{z}}$ :

$$\mathbf{v} = U\hat{\mathbf{x}} + V\hat{\mathbf{y}} + W\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.6)$$

Tranformasi kecepatan heliosentrik bintang dari koordinat bola ke koordinat kartesius diberikan oleh Persamaan B.4 yang telah diturunkan dalam Lampiran B. Bila kita cermati persamaan B.4, pada prinsipnya kita membutuhkan informasi kecepatan radial untuk memperoleh  $\mathbf{v}$ . Seperti yang kita ketahui, dalam Katalog *Hipparcos* tidak terdapat informasi tersebut. Alasan untuk tidak mengikutkan data kecepatan radial dari katalog lain akan dibahas dalam Bab 3 dan metode untuk mengatasi hal ini akan dibahas dalam Bab 4.

### 2.2.2 Standar Diam Galaktik

Standar Diam Galaktik adalah kerangka acuan yang berpusat pada Pusat Galaksi kita, atau lebih tepatnya adalah barisenter Galaksi kita. Ini kita sebut dengan Standar Diam Fundamental (FSR, *Fundamental Standard of Rest*). Vektor kecepatan sebuah bintang relatif terhadap FSR dinyatakan dalam koordinat silinder,  $\mathbf{v}_F \equiv (v_R, v_\phi, v_z)$ .  $v_R$  adalah komponen kecepatan yang arahnya radial terhadap pusat galaksi, positif bila menjauhi



**Gambar 2.2:** Standar Diam Fundamental adalah standar diam yang mengacu pada Pusat Galaksi Bima Sakti. Vektor kecepatan sebuah bintang yang berada pada jarak  $R$  dari Pusat Galaksi dapat dinyatakan dalam komponen koordinat silinder: komponen arah radial yaitu  $v_R$  (positif bila menjauhi Pusat Galaksi), komponen arah tangensial  $v_\phi$  (positif bila searah dengan rotasi Galaksi), dan komponen  $v_z$  ke arah Kutub Galaksi (positif bila searah dengan Kutub Utara Galaksi). Pada gambar ini, panjang vektor diperbesar untuk memberikan penekanan pada arah.

pusat Galaksi.  $v_\phi$  adalah komponen kecepatan yang searah dengan rotasi Galaksi, positif bila searah dengan rotasi Galaksi.  $v_z$  adalah komponen kecepatan yang arahnya tegak lurus terhadap bidang galaktik, positif bila searah dengan Kutub Utara Galaksi. Dalam konteks koordinat galaksi,  $v_R$  akan positif dalam arah ( $l = 180^\circ$ ,  $b = 0$ ),  $v_\phi$  akan positif dalam arah ( $l = 90^\circ$ ,  $b = 0$ ), dan  $v_z$  akan positif dalam arah  $b = +90^\circ$ .

### 2.2.3 Standar Diam Lokal dan Kecepatan Diri

Bila kita hanya mempelajari bintang-bintang lokal di sekitar matahari, tidak mungkin menentukan Standar Diam Fundamental karena semua objek yang teramati bergerak relatif terhadap matahari. Untuk itu kita dapat menentukan sebuah Standar Diam Lokal

(LSR, *Local Standard of Rest*). Gerak bintang relatif terhadap LSR dinamakan *peculiar motion* dan vektor kecepatannya (disebut kecepatan diri atau *peculiar velocity*) dinotasikan sebagai

$$\mathbf{v}' = U'\hat{\mathbf{x}} + V'\hat{\mathbf{y}} + W'\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.7)$$

Dengan cara yang sama dapat kita definisikan pula gerak lokal matahari yaitu vektor kecepatan matahari relatif terhadap LSR:

$$\mathbf{v}_{\odot} = U_{\odot}\hat{\mathbf{x}} + V_{\odot}\hat{\mathbf{y}} + W_{\odot}\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.8)$$

Gerak bintang relatif terhadap LSR pada dasarnya dapat ditentukan dengan mengubah kerangka acuan dari matahari menjadi titik nol pada LSR:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\odot}. \quad (2.9)$$

Bila Persamaan 2.9 dirata-ratakan untuk sejumlah  $N$  bintang, akan diperoleh

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}_{\odot}. \quad (2.10)$$

Karena LSR adalah sebuah standar diam dari sekelompok bintang maka kecepatan rata-rata (relatif terhadap LSR), atau sentroid kecepatan, dari bintang-bintang tersebut haruslah bernilai nol:

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = 0, \quad (2.11)$$

sehingga kecepatan matahari relatif terhadap LSR adalah:

$$-\mathbf{v}_{\odot} = \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (2.12)$$

Dengan demikian gerak lokal matahari adalah kebalikan arah dari rata-rata kecepatan heliosentrik bintang-bintang lokal. Bila  $\mathbf{v}_{\odot}$  pada Persamaan 2.9 disubstitusikan dengan definisi pada Persamaan 2.12, maka vektor kecepatan bintang relatif terhadap LSR adalah

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (2.13)$$

Setelah  $\mathbf{v}_{\odot}$  diperoleh selanjutnya dapat dihitung kecepatan gerak yaitu

$$S_{\odot} = \sqrt{U_{\odot}^2 + V_{\odot}^2 + W_{\odot}^2}, \quad (2.14)$$

dan koordinat apex

$$\tan l_A = \frac{V_\odot}{U_\odot}, \quad (2.15)$$

$$\tan b_A = \frac{W_\odot}{\sqrt{U_\odot^2 + V_\odot^2}}. \quad (2.16)$$

Kita dapat melihat bahwa titik LSR berubah-ubah tergantung dari sampel yang kita gunakan dalam menentukan rata-rata kecepatan heliosentrik. Dalam sebuah sistem yang aksisimetrik dan berada dalam keadaan tunak (*steady state*), titik LSR akan bergerak mengelilingi Pusat Galaksi dalam orbit lingkaran dengan radius  $R$ , di mana  $R$  adalah jari-jari orbit tersebut. Kecepatan orbitnya pada radius  $R$  tersebut adalah  $v_c(R)$ .

## 2.3 Elipsoid Kecepatan

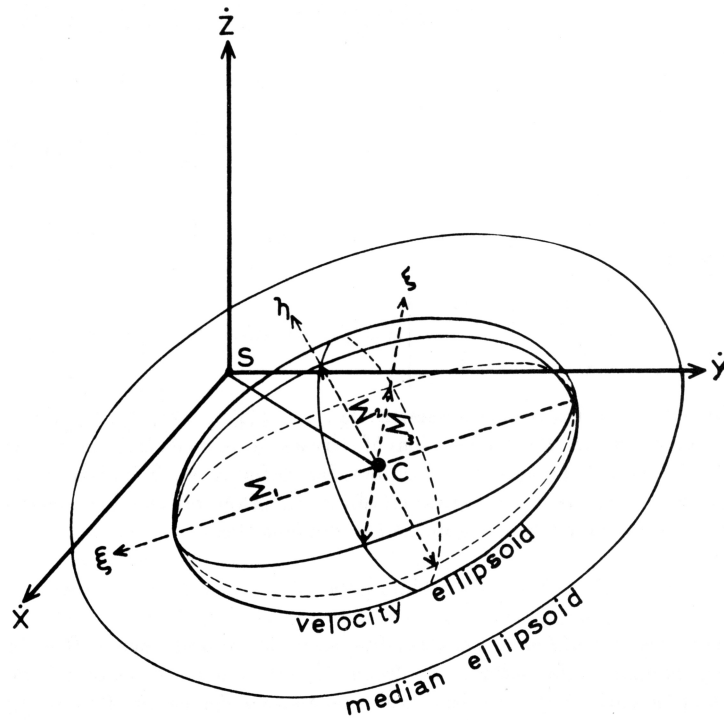
Distribusi kecepatan elipsoidal pada prinsipnya adalah fungsi distribusi Gaussian dengan tiga variabel yang ketiganya merupakan distribusi kecepatan dalam arah  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\eta}$ , dan  $\hat{\zeta}$ , yaitu sumbu yang searah dengan arah ketiga sumbu panjang dari elipsoid kecepatan. Bila kita notasikan  $n(\xi, \eta, \zeta)$  sebagai jumlah bintang per satuan volume yang memiliki kecepatan diri dalam rentang  $(\xi, \xi + d\xi)$ ,  $(\eta, \eta + d\eta)$ ,  $(\zeta, \zeta + d\zeta)$ , maka  $n(\xi, \eta, \zeta)$  akan mengambil bentuk

$$n(\xi, \eta, \zeta)d\xi, d\eta, d\zeta = \frac{\nu}{(2\pi)^{3/2}\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_2^2} + \frac{\zeta^2}{\sigma_3^2}\right)\right] \quad (2.17)$$

di mana  $\nu$  adalah kerapatan dari sampel yang sedang dipelajari (jumlah sampel pada seluruh kecepatan per satuan volume), dan  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  adalah dispersi kecepatan masing-masing pada arah sumbu  $\xi, \eta$ , dan  $\zeta$ .

Situasi geometris dari elipsoid kecepatan ditunjukkan dalam Gambar 2.3 yang menunjukkan sebuah elipsoid kecepatan dengan panjang sumbu utama  $\sigma_1, \sigma_2$ , dan  $\sigma_3$ . Titik pusat elipsoid adalah  $(\langle U \rangle, \langle V \rangle, \langle W \rangle)$  yaitu kecepatan rata-rata dari kelompok bintang yang sedang ditinjau. Vektor yang ditarik dari titik pusat elipsoid menuju sembarang titik  $(U, V, W)$  dengan demikian mewakili kecepatan diri dari objek yang memiliki kecepatan heliosentrik  $\mathbf{v} = (U, V, W)$ .

Dispersi kecepatan rata-rata  $\langle \mathbf{v} \rangle$  dideskripsikan oleh enam parameter yaitu  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ , dan  $\sigma_{yz}$ .  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ , dan  $\sigma_{zz}$  adalah dispersi pada arah sumbu  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ , dan  $\hat{\mathbf{z}}$ ,



**Gambar 2.3:** Elipsoid kecepatan Schwarzschild yang mendeskripsikan distribusi kecepatan dalam ruang kecepatan. Sumber: Trumpler dan Weaver, 1953

sementara  $\sigma_{ij}, i, j = x, y, z$  adalah kovarians antara  $i$  dengan  $j$ . Keenam parameter ini dapat menyusun tensor dispersi kecepatan  $\sigma^2$  yang berbentuk

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy}^2 & \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_{yy}^2 & \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{xz}^2 & \sigma_{yz}^2 & \sigma_{zz}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Dispersi  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  adalah nilai eigen dari tensor  $\sigma^2$ , dan dapat dihitung dengan melakukan diagonalisasi tensor  $\sigma^2$ :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}^2 - \sigma_1^2 & \sigma_{xy}^2 & \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_{yy}^2 - \sigma_2^2 & \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{xz}^2 & \sigma_{yz}^2 & \sigma_{zz}^2 - \sigma_3^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

Parameter lain yang mendeskripsikan elipsoid kecepatan adalah deviasi verteks yaitu sudut antara sumbu  $\hat{U}$  dengan vektor proyeksi sumbu  $\hat{\xi}$  pada bidang  $xy$ . Karena sumbu  $\hat{U}$  mengarah pada pusat Galaksi maka deviasi verteks adalah bujur Galaktik dari arah

sumbu  $\hat{\xi}$  atau dengan kata lain adalah bujur Galaktik dari arah dispersi  $\sigma_1$ . Deviasi verteks  $l_v$  ditentukan dengan

$$l_v \equiv \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2} \right). \quad (2.20)$$

## 2.4 Dinamika Galaksi

Kinematika lokal dapat dijelaskan lebih lanjut bila kita meninjau dinamika bintang, yaitu studi teoritis atas sekumpulan titik massa yang berinteraksi satu sama lain menurut Hukum Gravitasi Newton. Dalam pemaparan berikut diambil beberapa asumsi: 1) Meskipun Galaksi terdiri atas sejumlah bintang, namun gaya bintang-bintang individual diabaikan dan hanya dipertimbangkan gaya skala besar yang ditimbulkan oleh distribusi massa secara keseluruhan. Dengan kata lain, diasumsikan potensial gravitasi yang kontinu dan mengabaikan iregularitas skala kecil yang diakibatkan oleh bintang-bintang individu. 2) Galaksi berada dalam keadaan tunak dan potensialnya aksisimetrik. Dalam beberapa penurunan akan digunakan sistem koordinat silinder  $(R, \phi, z)$  yang berpusat pada Pusat Galaksi.

### 2.4.1 Orbit dalam Potensial Aksisimetrik

Persamaan gerak sebuah bintang yang berada di bawah pengaruh potensial (Persamaan C.2) simetrik terhadap bidang  $z = 0$ ,  $\Phi(R, z)$ , adalah

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi(R, z). \quad (2.21)$$

Dengan menuliskan  $\mathbf{r}$  dan  $\nabla \Phi$  dalam komponen-komponennya yang sejajar dengan vektor satuan  $\hat{\mathbf{e}}_R$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ , dan  $\hat{\mathbf{e}}_z$ , kita memperoleh

$$\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{e}}_R + z\hat{\mathbf{e}}_z \quad (2.22)$$

dan

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial R} \hat{\mathbf{e}}_R + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (2.23)$$

Dalam koordinat silinder, vektor percepatan objek adalah

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{e}}_R + (2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\hat{\mathbf{e}}_\phi + \ddot{z}\hat{\mathbf{e}}_z, \quad (2.24)$$



sehingga kita memperoleh

$$\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}, \quad (2.25)$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) = 0, \quad (2.26)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (2.27)$$

Persamaan 2.26 mengekspresikan kekekalan momentum sudut pada sumbu  $z$ ,  $L_z = R^2\dot{\phi}$ , sementara Persamaan 2.25 dan 2.27 mendeskripsikan osilasi terkopel dalam arah  $R$  dan  $z$ . Dengan mengeliminasi  $\dot{\phi}^2$  pada 2.25 kita akan memperoleh

$$\ddot{R} = -\frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial R}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial z}, \quad (2.28)$$

di mana

$$\Phi_{\text{eff}} \equiv \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}. \quad (2.29)$$

Dengan demikian gerak tiga dimensi sebuah bintang dalam potensial aksisimetrik  $\Phi(R, z)$  dapat direduksi menjadi gerak bintang pada sebuah bidang. Bidang yang berotasi (secara nonuniform) dengan koordinat  $(R, z)$  ini disebut bidang meridional dan  $\Phi_{\text{eff}}(R, z)$  disebut potensial efektif.

Nilai minimum  $\Phi_{\text{eff}}$  terjadi di mana berlaku

$$0 = \frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial R} = \frac{\partial\Phi}{\partial R} - \frac{L_z^2}{R^3} \quad (2.30)$$

$$0 = \frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial z}. \quad (2.31)$$

Persyaratan kedua berlaku di manapun pada bidang ekuatorial  $z = 0$ , dan yang pertama berlaku pada radius  $R_g$  di mana

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)_{(R_g, 0)} = \frac{L_z^2}{R_g^3} = R_g\dot{\Phi}^2. \quad (2.32)$$

Ini adalah kondisi syarat untuk sebuah orbit melingkar dengan kecepatan sudut  $\dot{\Phi}$ . Dengan demikian nilai minimum  $\Phi_{\text{eff}}$  terjadi pada radius sebuah orbit melingkar yang memiliki momentum sudut  $L_z$ , dan nilai  $\Phi_{\text{eff}}$  pada titik minimum tersebut adalah energi dari orbit melingkar tersebut.

Pada piringan galaksi banyak bintang bergerak dalam orbit yang hampir melingkar, sehingga akan berguna menurunkan solusi pendekatan untuk Persamaan 2.28 yang cocok dengan orbit seperti demikian. Pertama-tama kita mendefinisikan  $x$  dengan

$$x \equiv R - R_g, \quad (2.33)$$

di mana  $R_g$  adalah solusi untuk Persamaan 2.32. Dengan demikian  $(x, z) = (0, 0)$  adalah koordinat dalam bidang meridional yang merupakan titik minimal dari  $\Phi_{\text{eff}}$ . Bila kita ekspansikan  $\Phi_{\text{eff}}$  dalam deret Taylor di sekitar titik ini, kita akan memperoleh

$$\Phi_{\text{eff}} = \frac{1}{2}x^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{1}{2}z^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} + O(xz^2) + \text{konstanta}. \quad (2.34)$$

Bagian yang sebanding dengan  $xz$  akan menghilang karena  $\Phi_{\text{eff}}$  simetrik terhadap  $z = 0$ . Persamaan 2.28 dapat disederhanakan dengan pendekatan episiklus di mana kita mengabaikan semua bagian dalam  $\Phi_{\text{eff}}$  yang memiliki orde  $xz^2$  atau pangkat yang lebih tinggi dari  $x$  dan  $z$ . Jika kita mendefinisikan

$$\kappa^2 \equiv \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} ; \quad \nu^2 \equiv \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)}, \quad (2.35)$$

maka Persamaan 2.28 akan menjadi

$$\ddot{x} = -\kappa^2 x, \quad (2.36)$$

$$\ddot{z} = -\nu^2 z. \quad (2.37)$$

Dengan demikian kedua persamaan ini mengatakan bahwa  $x$  dan  $z$  bersikap seperti osilator harmonik dengan frekuensi masing-masing adalah  $\kappa$  dan  $\nu$ . Kedua frekuensi  $\kappa$  dan  $\nu$  masing-masing disebut frekuensi episiklus dan frekuensi vertikal. Jika dari Persamaan 2.29 kita substitusikan untuk  $\Phi_{\text{eff}}$  kita akan memperoleh

$$\kappa^2 = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{3L^2}{R_g^4}, \quad (2.38)$$

$$\nu^2 = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)}. \quad (2.39)$$

Karena frekuensi melingkar diberikan oleh

$$\Omega^2(R) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g, 0)} = \frac{L_z^2}{R^4}, \quad (2.40)$$

maka Persamaan 2.38 dapat ditulis

$$\kappa^2 = \left( R \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2 \right)_{R_g} . \quad (2.41)$$

Selanjutnya kita dapat mendefinisikan  $\kappa_0$  dan  $\Omega_0$  masing-masing sebagai frekuensi episiklus dan frekuensi melingkar pada radius  $R_0$  yaitu jarak Matahari dari Pusat Galaksi. Jika kita menggunakan Konstanta Oort  $A$  dan  $B$  yang didefinisikan dengan

$$A = -\frac{1}{2} \left( R \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0} , \quad (2.42)$$

$$B = - \left( \frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR} + \Omega \right)_{R_0} , \quad (2.43)$$

maka substitusi 2.42 dan 2.43 ke dalam 2.41 akan menghasilkan

$$\kappa_0^2 = -4B(A - B) = -4B\Omega_0, \quad (2.44)$$

dan kecepatan sudut pada  $R_0$  adalah

$$\Omega_0 = A - B. \quad (2.45)$$

Berbagai penelitian untuk menentukan Konstanta Oort  $A$  dan  $B$  telah dilakukan, dan dalam pekerjaan ini digunakan nilai  $A$  dan  $B$  yang diturunkan oleh Feast dan Whitelock (1997) berdasarkan Cepheid *Hipparcos*:  $A = 14.82 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  dan  $B = -12.37 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ . Dengan menggunakan kedua nilai ini maka frekuensi episiklus Matahari adalah  $\kappa_0 = 36.7 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , dan rasio  $\kappa_0/\Omega_0$  Matahari adalah

$$\frac{\kappa_0}{\Omega_0} = 2\sqrt{\frac{B}{B - A}} = 1.35 \quad (2.46)$$

Integrasi persamaan gerak 2.36 dan 2.37 akan menghasilkan energi dari kedua osilator yaitu

$$E_R \equiv \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \kappa^2 x^2) \quad ; \quad E_z \equiv \frac{1}{2}(\dot{z}^2 + \nu^2 z^2). \quad (2.47)$$

Untuk Galaksi Bima Sakti,  $\Phi_{\text{eff}} \propto z^2$  untuk nilai  $z$  di mana  $\rho_{\text{disk}} \simeq$  konstan, pada  $z \lesssim 300 \text{ pc}$  [6, hal. 123]. Untuk bintang yang lebih rendah dari batas ketinggian ini, solusi untuk Persamaan 2.37 adalah

$$z = Z \cos(\nu t + \zeta), \quad (2.48)$$

di mana  $Z$  dan  $\zeta$  adalah konstanta sembarang. Namun, sebagian besar orbit bintang membawa bintang-bintang ini jauh di atas bidang Galaksi hingga melebihi 300 pc. Dengan demikian pendekatan episiklus tidak menghasilkan deskripsi terpercaya untuk gerak dalam arah  $z$ . Pendekatan ini bekerja untuk bintang-bintang yang bergerak dalam orbit melingkar pada bidang ekuator Galaksi [6, hal. 123].

Persamaan 2.37, yang mendeskripsikan gerak radial, memiliki solusi umum

$$x(t) = X \cos(\kappa t + \psi), \quad (2.49)$$

atau

$$R = R_g + X \cos(\kappa t + \psi) \quad (2.50)$$

bila mengingat definisi  $x$  pada Persamaan 2.33.  $X$  dan  $\psi$  adalah konstanta sembarang. Sekarang, dari 2.40, kita nyatakan  $\phi_g = L_z/R_g^2$  sebagai kecepatan sudut dari sebuah orbit dengan momentum sudut  $L_z$ . Karena kekekalan  $L_z$ , maka

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L_z}{R^2} = \frac{L_z}{R_g^2} \left(1 + \frac{x}{R_g}\right)^{-2} \\ &\simeq \Omega_g \left(1 - \frac{2x}{R_g}\right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dengan mensubstitusikan  $x$  dengan Persamaan 2.49 dan melakukan integrasi, kita memperoleh

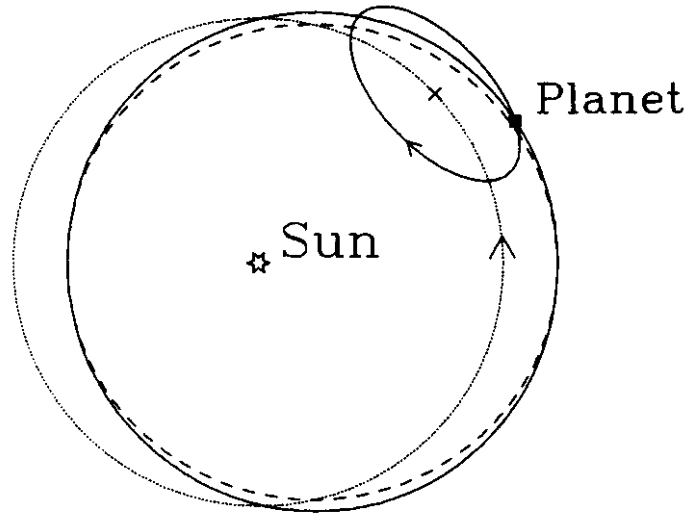
$$\phi = \Omega_g t + \phi_0 - \frac{2\Omega_g X}{\kappa R_g} \sin(\kappa t + \psi). \quad (2.52)$$

Sifat dari gerakan yang dideskripsikan oleh Persamaan-persamaan ini dapat diperjelas dengan mendefinisikan sumbu Kartesius  $(x, y, z)$  dengan titik pusat berada pada titik pemandu (*guiding center*, atau disebut juga episenter)  $R = R_g$ ,  $\phi = \Omega_g t + \phi_0$ . Koordinat  $x$  dan  $z$  telah didefinisikan oleh Persamaan 2.49 dan 2.48, dan  $y$  akan tegak lurus terhadap keduanya. Dari 2.51 kita memperoleh

$$y = -\frac{2\Omega_g X}{\kappa} \sin(\kappa t + \psi) \quad (2.53)$$

$$= -Y \sin(\kappa t + \psi). \quad (2.54)$$

Persamaan 2.49 dan 2.53 dengan demikian adalah solusi lengkap untuk orbit sebuah bintang dalam pendekatan episiklus. Gerak dalam arah  $z$  akan independen terhadap



**Gambar 2.4:** Sebuah orbit Kepler berbentuk elips (kurva bergaris putus-putus) dapat didekati dengan baik oleh gerak episiklus, yaitu bila Planet bergerak dalam orbit elips dan frekuensi  $\kappa$  mengelilingi sebuah titik pusat, sementara titik pusat tersebut bergerak mengelilingi matahari dengan kecepatan sudut  $\Omega$  dalam orbit lingkaran (kurva titik-titik). Gerak episiklus ditandai oleh garis tegas. Sumber: Binney dan Tremaine, 1987

gerak  $x$  dan  $y$ . Pada bidang  $(x, y)$  bintang bergerak dalam sebuah elips—yang disebut episiklus—di sekitar episenter atau (lihat Gambar 2.4). Rasio panjang kedua sumbu elips adalah

$$\frac{X}{Y} = \frac{\kappa}{2\Omega_g}. \quad (2.55)$$

Dari Persamaan 2.46,  $X/Y \simeq 0.7$  pada daerah lokal matahari. Bintang bergerak mengitari episiklus dalam arah balik (*retrograde*), dengan periode  $2\pi/\kappa$ .

Bila kita merata-ratakan  $\dot{x}^2$  dan  $\dot{y}^2$  untuk sejumlah bintang yang orbitnya hanya berbeda dalam fase  $\phi$ , kita mendapatkan

$$\frac{\overline{\dot{y}^2}}{\overline{\dot{x}^2}} = \frac{[v_\phi - v_c(R_g)]^2}{v_R^2} = \frac{4\Omega_g^2}{\kappa^2} \simeq \frac{4\Omega_0^2}{\kappa_0^2} = \frac{A - B}{-B}. \quad (2.56)$$

Namun, persamaan ini tidak praktis karena pada umumnya kita tidak mengetahui titik episenter dari setiap bintang. Kita hanya dapat menentukan  $v_R$  dan  $v_\phi(R_0) - v_c(R_0)$  dari sekelompok bintang, yang masing-masing memiliki radius episentris  $R_g$  yang berbeda-

beda. Namun bila kita menghitung

$$\begin{aligned} v_\phi(R_0) - v_c(R_0) &= R_0(\dot{\phi} - \Omega_0) = R_0(\dot{\phi} - \Omega_g + \Omega_g - \Omega_0) \\ &\simeq R_0 \left[ (\dot{\phi} - \Omega_g) - x \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0} \right], \end{aligned} \quad (2.57)$$

dengan menggunakan Persamaan 2.51 akan diperoleh

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) \simeq -R_0 x \left[ \frac{2\Omega_g}{R_g} + \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0} \right] \quad (2.58)$$

dan untuk nilai  $x$  yang kecil kita dapat mendekati  $\Omega_g/R_g$  dengan  $\Omega_0/R_0$  sehingga dapat diperoleh

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) \simeq -x \left[ 2\Omega_0 + R_0 \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0} \right], \quad (2.59)$$

dan dengan menggunakan definisi Konstanta Oort kita memperoleh

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) \simeq 2Bx. \quad (2.60)$$

Dengan cara yang sama kita dapat mengabaikan kebergantungan  $k$  pada  $R_g$  untuk—dengan bantuan Persamaan 2.44—memperoleh

$$\overline{v_R^2} = \overline{\kappa^2 x^2} \simeq -4B(A - B)\overline{x^2}. \quad (2.61)$$

Akhirnya, kita dapat menghitung

$$\frac{[v_\phi - v_c(R_0)]^2}{\overline{v_R^2}} = \frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} \simeq \frac{4\Omega_g^2}{\kappa^2} \simeq \frac{4\Omega_0^2}{\kappa_0^2} = \frac{-B}{A - B} \simeq 0.45. \quad (2.62)$$

Dapat dilihat bahwa rasio sumbu pada Persamaan 2.62 adalah kebalikan rasio kecepatan pada Persamaan 2.56. Ini karena sumbu terpanjang episiklus berada pada arah tangensial sementara sumbu terpanjang elipsoid kecepatan berada pada arah radial [6, hal. 126].

## 2.4.2 Aliran Asimetris

Dasar dari dinamika bintang adalah mekanika  $N$ -benda yang dideskripsikan oleh Persamaan Boltzmann Tanpa Tumbukan yang telah diturunkan dalam Lampiran C. Pengintegralan Persamaan Boltzmann pada seluruh kecepatan akan menghasilkan Persamaan Jeans (Persamaan C.24 pada Lampiran C) yang dapat kita gunakan untuk menjelaskan

hasil-hasil yang diperoleh dari perhitungan gerak lokal matahari dan tensor dispersi kecepatan.

Pada Bab 5 nanti kita akan melihat bahwa bintang-bintang dengan dispersi  $S^2$  (Persamaan 4.11 dalam Bab 4) yang besar akan berevolusi mengelilingi Pusat Galaksi dengan kecepatan yang lebih lambat daripada kecepatan rotasi LSR. Kita dapat mendefinisikan aliran asimetris (*asymmetric drift*)  $v_a \equiv v_c - \bar{v}_\phi$  sebuah populasi bintang sebagai perbedaan antara kecepatan LSR dan kecepatan rata-rata rotasi populasi tersebut, dan dapat kita lihat aliran asimetris terkait oleh Persamaan C.25.

Kita asumsikan piringan Galaksi berada dalam keadaan tunak dan simetri pada ekuatornya. Karena Matahari berada dekat ekuator Galaksi, maka kita dapat meninjau Persamaan C.25 pada  $z = 0$ , dan mengasumsikan  $(\partial\nu/\partial z) = 0$  melalui kesimetrian, dan memperoleh

$$\frac{R}{\nu} \frac{\partial(\overline{\nu v_R^2})}{\partial R} + R \frac{\partial(\overline{v_R v_z})}{\partial z} + \overline{v_R^2} - \overline{v_\phi^2} + R \frac{\partial\Phi}{\partial R} = 0 \quad (z = 0). \quad (2.63)$$

Selanjutnya dispersi kecepatan azimuthal  $\sigma_\phi^2$  didefinisikan oleh

$$\sigma_\phi^2 = \overline{(v_\phi - \bar{v}_\phi)^2} = \overline{v_\phi^2} - \bar{v}_\phi^2, \quad (2.64)$$

dan mensubstitusikan  $R(\partial\Phi/\partial R) = v_c^2$ , di mana  $v_c$  adalah kecepatan sirkular, untuk memperoleh

$$\begin{aligned} \sigma_\phi^2 - \overline{v_R^2} - \frac{R}{\nu} \frac{\partial(\overline{\nu v_R^2})}{\partial R} - R \frac{\partial(\overline{v_R v_z})}{\partial z} &= v_c^2 - \bar{v}_\phi^2 \\ &= (v_c - \bar{v}_\phi)(v_c + \bar{v}_\phi) = 2v_a(2v_c - v_a). \end{aligned} \quad (2.65)$$

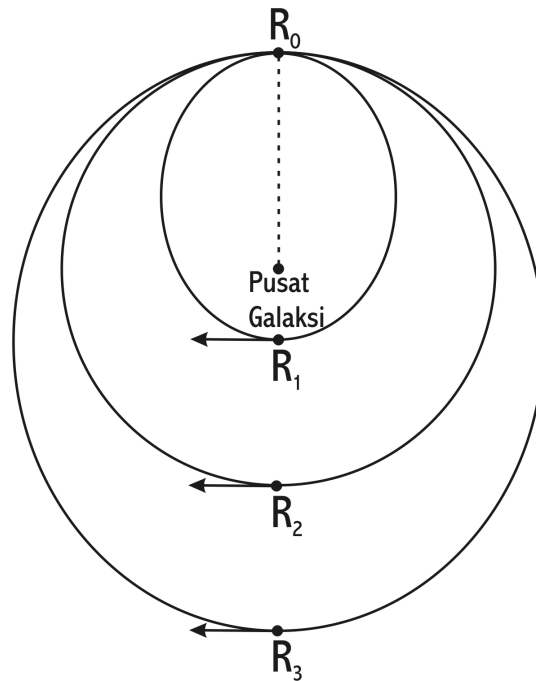
Jika kita abaikan  $v_a$  dibandingkan  $2v_c$ , maka kita akan memperoleh

$$2v_c v_a \simeq \overline{v_R^2} \left[ \frac{\sigma_\phi^2}{\overline{v_R^2}} - 1 - \frac{\partial \ln(\overline{\nu v_R^2})}{\partial \ln R} - \frac{R}{\overline{v_R^2}} \frac{\partial(\overline{v_R v_z})}{\partial z} \right]. \quad (2.66)$$

Dengan demikian Persamaan 2.66 mengkuantifikasi besarnya aliran asimetris yaitu seberapa cepat sekelompok bintang tertinggal terhadap kecepatan sirkular LSR mengelilingi Pusat Galaksi. Bila kita mengingat hubungan antara dispersi kecepatan dalam arah radial

$$\sigma_R^2 = \overline{v_R^2} - \bar{v}_R^2 \quad (2.67)$$

dan mensubstitusikan  $\overline{v_R^2} = \sigma_R^2 + \bar{v}_R^2$  ke dalam 2.66, maka kita akan menemukan hubungan linear antara aliran asimetris  $v_a$  dengan dispersi  $\sigma_R^2$ .



**Gambar 2.5:** Bintang yang memulai orbitnya pada titik  $R_2$  akan bergerak dengan orbit lingkaran dengan kecepatan orbit  $v_\phi(R_0) \equiv v_c(R_0)$ . Pada saat mencapai titik  $R_0$  bintang akan bergerak dengan kecepatan yang sama dengan kecepatan titik LSR. Bintang yang memulai orbitnya pada titik  $R_1$  akan mencapai titik apogalaktikum pada  $R_0$ . Kecepatan orbit pada titik ini adalah  $v_\phi(R_0) < v_c(R_0)$ , sehingga dengan demikian bintang-bintang ini tertinggal di belakang LSR. Bintang yang memulai orbitnya pada titik  $R_3$  akan mencapai titik perigalaktikum pada  $R_0$ , sehingga kecepatannya adalah  $v_\phi(R_0) > v_c(R_0)$ . Bintang-bintang ini bergerak lebih cepat daripada kecepatan LSR.

Kita dapat memisalkan bintang-bintang dalam daerah lokal matahari terdiri atas tiga campuran bintang (semuanya berada dalam piringan Galaksi, sehingga  $Z = 0$ ) sebagai berikut:

1. Bintang-bintang yang bergerak dalam orbit lingkaran dengan  $r \equiv R_0$  dan  $v_\phi(R_0) \equiv v_c(R_0)$ . Bintang-bintang ini dengan demikian bergerak bersama-sama LSR.
2. Bintang-bintang yang bergerak dalam orbit elips dengan  $r < R_0$ . Bila bintang-bintang ini berada pada  $r = R_{\max} = R_0$ , bintang-bintang ini berada pada titik apogalaktikum (terjauh dari Pusat Galaksi) dalam orbitnya dan memiliki kecepatan



orbit  $v_\phi(R_0) < v_c(R_0)$ . Dengan demikian bintang-bintang ini tertinggal di belakang LSR.

3. Bintang-bintang yang bergerak dalam orbit elips dengan  $r > R_0$ . Saat bintang berada pada  $r = R_{\min} = R_0$ , bintang-bintang ini berada pada titik perigalaktikum (terdekat dari Pusat Galaksi) dalam orbitnya sehingga memiliki kecepatan orbit  $v_\phi(R_0) > v_c(R_0)$ . Bintang-bintang ini melaju mendahului LSR.

Ilustrasi mengenai uraian ini dapat dilihat pada Gambar 2.5.

### 2.4.3 Pemanasan Piringan Galaksi

Kecepatan diri  $\mathbf{v}'$  sebuah bintang berubah dengan bergeraknya bintang dalam orbitnya mengelilingi Galaksi. Jika medan gravitasi Galaksi benar-benar kontinyu dan aksisimetrik, maka perubahan  $\mathbf{v}'$  disebabkan hanya oleh osilasi episiklus pada  $R$  dan  $z$ , dan  $\mathbf{v}$  tidak akan selamanya bertambah besar [6, hal. 472].

Pada Subbab 2.4.1 telah ditunjukkan bahwa sebuah bintang bergerak dalam orbit Episiklus dengan digerakkan oleh Energi episiklus  $E_R \equiv \frac{1}{2}[v_R^2 + \kappa^2(R - R_g)^2]$  dalam arah  $R$  dan Energi  $E_z = \frac{1}{2}(v_z^2 + \nu^2 z^2)$  dalam arah  $z$ . Bila kita rata-ratakan keduanya kita akan mendapatkan rasio  $\langle E_z \rangle / \langle E_R \rangle$  sebagai

$$\frac{\langle E_z \rangle}{\langle E_R \rangle} = \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2}. \quad (2.68)$$

Peningkatan  $\sigma_3/\sigma_1$  terhadap waktu disebut dengan pemanasan piringan galaksi, dan ada beberapa dugaan tentang penyebab meningkatnya dispersi kecepatan terhadap waktu.

Spitzer dan Schwarzschild (1953) menduga bahwa perjumpaan (*encounter*) antara bintang-bintang piringan dengan awan gas masif adalah penyebab adanya dispersi yang tinggi pada bintang-bintang tua. Awan molekular raksasa dapat berkumpul membentuk kompleks dengan massa  $M \gtrsim 10^6 M_\odot$  dan diameter  $D \lesssim 200$  pc [27], sehingga potensial awan dapat mengubah arah dan kecepatan sebuah bintang. Lacey (1984) menunjukkan bahwa hamburan oleh awan molekular berperan penting dalam meningkatkan dispersi kecepatan jika massa awan berada pada batas atas dari rentang yang mungkin diamati, yaitu  $M \simeq 10^6 M_\odot$ . Namun bila memperhitungkan dispersi tinggi pada bintang-bintang tua, massa awan tersebut pada masa lalu harus lebih besar, paling tidak dalam orde

$10^{10} M_{\odot}$ . Meskipun demikian, Lacey memperoleh  $\sigma_3/\sigma_1 \simeq 0.81$  dan ini lebih besar daripada hasil yang dihitung dari data pengamatan,  $\sigma_3/\sigma_1 \simeq 0.5$  (Wielen, 1977). Oleh karena itu kemungkinan ada mekanisme lain yang menyebabkan pemanasan piringan Galaksi.

Pekerjaan Barbanis dan Woltjer (1967) mengambil sudut pandang yang berbeda: hamburan bintang-bintang piringan ditimbulkan oleh medan gravitasi lengan spiral Galaksi. Pengamatan piringan Galaksi pada panjang gelombang inframerah menunjukkan bahwa lengan spiral Galaksi merupakan puncak dari distribusi bintang-bintang tua yang membentuk sebagian besar massa Galaksi, sehingga wajar untuk menduga bahwa medan gravitasi dari struktur spiral dapat menyebabkan pemanasan piringan Galaksi. Simulasi komputer menghasilkan prediksi  $\sigma_3/\sigma_1$  yang cocok dengan data pengamatan, namun satu masalah dari hipotesis ini adalah struktur spiral hanya mempengaruhi kecepatan radial dan azimuth, sementara kecepatan dalam arah  $z$  tidak terkena dampaknya secara langsung [6, hal. 483]. Dengan demikian, hamburan oleh lengan spiral gagal menjelaskan mengapa dispersi dalam ketiga arah meningkat dengan laju yang kurang lebih sama.

Kombinasi hamburan oleh keduanya dihitung oleh Jenkins dan Binney (1990), dan mereka memperoleh beberapa hasil:

1. Pemanasan hanya oleh awan menghasilkan  $\sigma_3/\sigma_1 \simeq 0.73$ , nilai ini berada di luar rentang yang diberikan oleh pengamatan.
2. Dengan menambahkan pemanasan oleh lengan spiral,  $\sigma_3/\sigma_1$  turun hingga mendekati nilai yang diperoleh dari pengamatan,  $\sigma_3/\sigma_1 \simeq 0.5$  (Wielen, 1977).

Secara umum, rasio  $\sigma_3/\sigma_1$  merupakan batasan dalam meninjau proses hamburan yang dominan dalam meningkatkan dispersi kecepatan.  $\sigma_3/\sigma_1 \simeq 0.5$  dapat diinterpretasikan sebagai adanya kontribusi yang signifikan baik dari awan molekul maupun struktur spiral dalam memanaskan piringan, sementara  $0.5 \lesssim \sigma_3/\sigma_1 \lesssim 0.8$  dapat dipandang sebagai berkurangnya peran struktur spiral dalam hamburan.

## Bab 3

# Seleksi Sampel

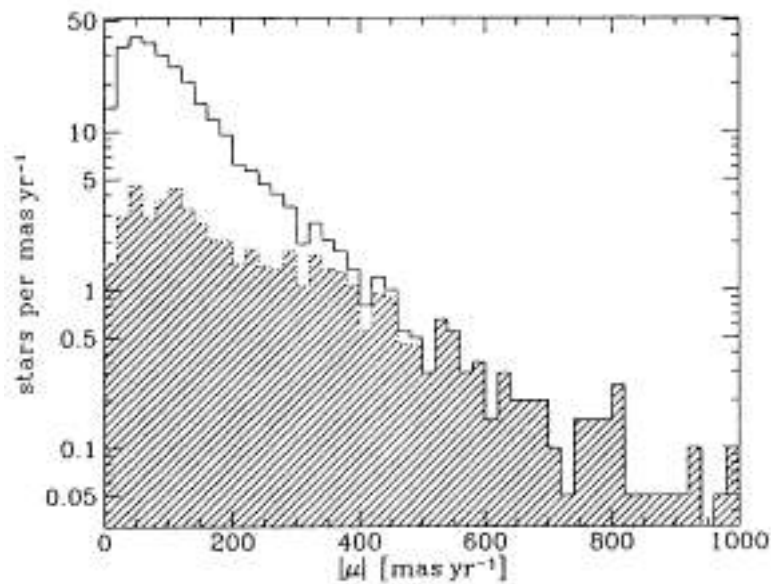
### 3.1 Masalah-Masalah Pencuplikan dan Deskripsi

#### Katalog *Hipparcos*

Sebuah katalog memiliki berbagai derajat kelengkapan, hal ini termasuk cakupan lokasi arah langit dan magnitudo ambang (*limiting magnitude*) instrumen. Bila posisi instrumen survey berada di Bumi, sebuah katalog dapat hanya mencakup objek-objek pada arah langit tertentu, atau karena keterbatasan instrumen maka sebuah katalog hanya mengukur objek-objek dalam batas kecerlangan tertentu atau dalam batas ketelitian tertentu. Selain berisi kesalahan acak hasil pengukuran, data dalam sebuah katalog juga tak bebas dari kesalahan sistematis instrumen yang besarnya tak diketahui.

Sebagaimana dijelaskan dalam Bab 2.1, perhitungan vektor kecepatan bintang  $\mathbf{v}_s \equiv (v_R, v_l, v_b)$  membutuhkan empat buah variabel teramati yaitu kecepatan radial  $v_R$ , paralaks  $\pi$ , dan komponen gerak diri dalam arah  $l$  dan  $b$  yaitu  $(\mu_{l*}, \mu_b)$ . Belum ada katalog lengkap yang mengukur keempat variabel tersebut sekaligus sehingga penggabungan data dari beberapa katalog sering dilakukan. Bila seseorang membentuk sampel dengan menggabungkan data dari beberapa katalog, maka risiko yang dihadapi adalah kesalahan sistematis—yang tak diketahui nilainya—dari pengukuran oleh instrumen-instrumen yang berbeda akan bertambah dalam sampel akhir.

Masalah lain yang terkait dengan penggabungan katalog adalah efek seleksi. Hanya sedikit objek-objek yang memiliki keempat variabel tersebut itu pun terbatas pada objek-



**Gambar 3.1:** Distribusi gerak diri dari sampel 5610 bintang yang dipilih Binney *et al.* [5] (histogram atas) dan 1072 bintang dari sampel tersebut yang memiliki data kecepatan radial (histogram bawah, diraster). Sumber: Binney *et al.*, 1997

objek dengan kecerlangan semu yang tinggi dan memiliki gerak diri yang cepat. Bintang yang diikutkan dalam program pengukuran paralaks cenderung dipilih karena gerak dirinya besar. Hal yang sama juga terjadi dengan data kecepatan radial. Binney *et al.* (1997) menunjukkan bahwa dari sampel yang mereka pilih dari Katalog *Hipparcos*, hanya 20% yang memiliki data kecepatan radial (Gambar 3.1) dalam tiga katalog lain pada arsip CDS di Strasbourg [5]. Nampak jelas bahwa jumlah bintang yang memiliki data kecepatan radial meningkat sebanding dengan makin besar gerak dirinya. Mekanisme yang sama ternyata juga berlaku untuk memilih bintang program dalam penyusunan katalog kecepatan radial, dan sampel dengan komponen vektor kecepatan bintang yang lengkap kemungkinan besar telah terbiaskan pada bintang-bintang yang bergerak relatif cepat terhadap matahari.

Dengan adanya fakta-fakta ini maka cukup berisiko untuk menggabungkan sampel dari *Hipparcos* dengan data kecepatan radial dari katalog lain.

Dalam Bab 1 telah disinggung keunggulan Katalog *Hipparcos* yang mengukur posisi, paralaks dan gerak diri dengan ketelitian hingga beberapa milidetikbusur. Selain itu

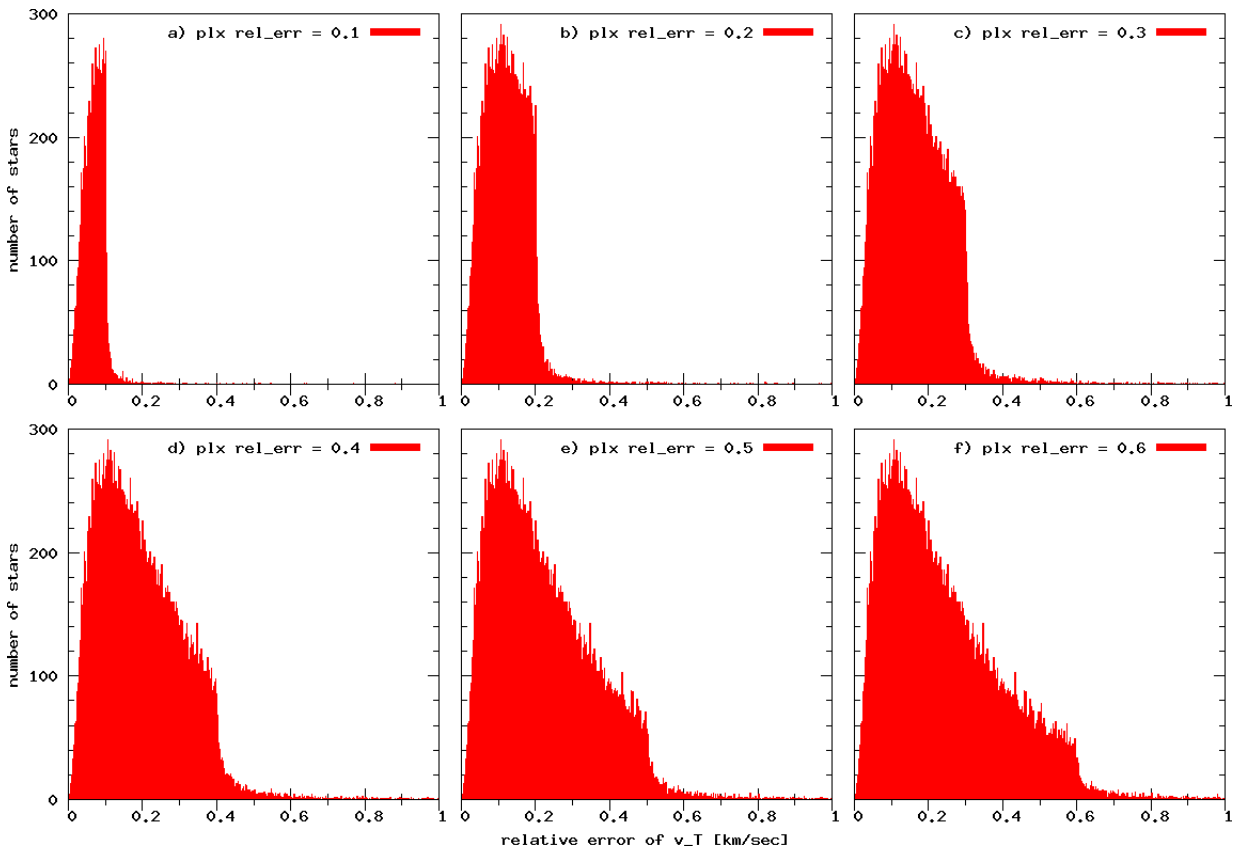
Katalog *Hipparcos* mencakup seluruh arah langit, ini berarti penggabungan data paralaks atau gerak diri dari katalog lain tidak diperlukan, sehingga kesalahan sistematik dari instrumen berbeda dapat diminimalkan karena parameter seluruh objek diukur dengan instrumen yang sama, dan dengan demikian memiliki kesalahan sistematik yang sama. Data *Hipparcos* berjumlah 118 218 entri, memiliki kecermatan astrometri menengah sekitar 1 milidetikbusur (1 mas). Katalog *Hipparcos* mengandung sekitar 60 000 objek dengan derajat kelengkapan yang tinggi dalam rentang  $V = 7.3 - 9$  mag, bergantung pada lintang galaktik  $b$  dan tipe spektrum. Sisanya merupakan pencuplikan sampel dengan derajat kelengkapan rendah, mencakup objek-objek dengan kecerlangan semu hingga 12 magnitudo [11, vol. 1, hal. 3-4]. Dengan derajat kelengkapan sampel yang tinggi praktis bias akibat efek seleksi dapat ditiadakan.

## 3.2 Seleksi Data

Sampel harus memenuhi beberapa kriteria tambahan bila kita akan menggunakannya untuk menentukan kinematika lokal sebagai fungsi dari usia bintang. Dehnen dan Binney (1998) merumuskan empat syarat:

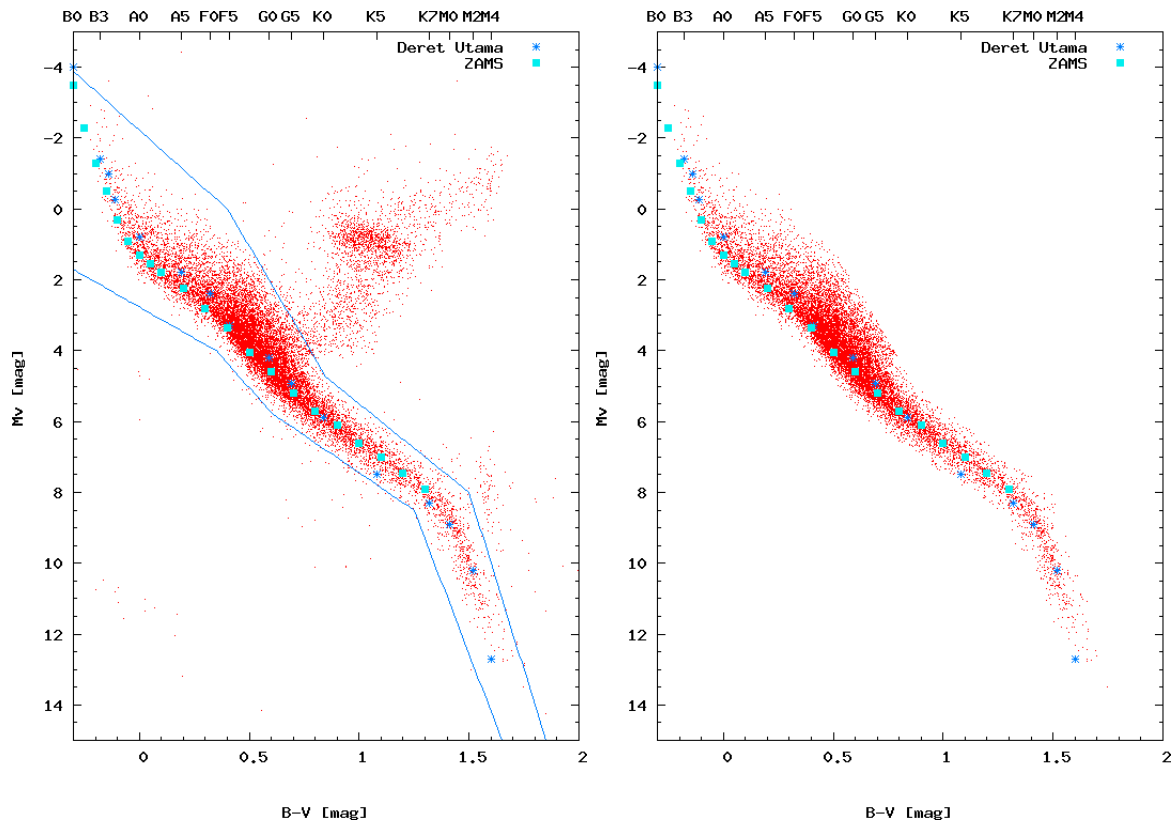
1. Sampel harus tak bias secara kinematik (*kinematically unbiased*), artinya selain tak bias pada kecepatan tertentu, sampel harus merupakan representasi dari kinematika bintang-bintang yang menempati posisi serupa dalam Diagram Hertzsprung-Russell.
2. Sampel harus dibatasi hanya pada bintang-bintang deret utama karena hanya pada deret utama terdapat hubungan yang ketat antara usia dengan Indeks Warna maupun Luminositas.
3. Sampel harus didasarkan pada astrometri yang akurat.
4. Sampel tidak boleh mengandung bintang multipel karena kinematika sistem bintang multipel dapat mengandung gerak tambahan.

Untuk memastikan bahwa dua syarat terakhir terpenuhi, diambil bintang tunggal dengan galat relatif paralaks kurang dari atau sama dengan 10%. Galat ini cukup kecil



**Gambar 3.2:** Bentuk kurva distribusi galat relatif kecepatan tangensial  $v_T$ , bila kita menyeleksi bintang *Hipparcos* dengan  $\sigma_\pi/\pi$  kurang dari (a) 0.1, (b) 0.2, (c) 0.3, (d) 0.4, (e) 0.5, dan (f) 0.6. Semakin besar toleransi  $\sigma_\pi/\pi$ , kurva distribusi semakin menunjukkan kecondongan distribusi ke arah  $\sigma_{v_T}/v_T \approx \sigma_\pi/\pi$

sehingga kebergantungan nonlinear kecepatan tangensial pada paralaks tidak menciptakan distribusi galat kecepatan tangensial yang terlalu condong (Gambar 3.2), yang dapat mempermudah analisis. Bila kesalahan menengah magnitudo visual dalam *Hipparcos* adalah 0.012 mag [11, vol. 1, hal. xv] dan galat relatif paralaks adalah 10%, maka galat terbesar Magnitudo Mutlak Visual  $\sigma_{M_v} \approx 0.2$  mag. Seleksi  $\sigma_\pi/\pi \leq 0.1$  secara otomatis membuang bintang-bintang terjauh, dan menyisakan 16 045 bintang dari jumlah total 118 218 bintang dalam Katalog. Dalam *Hipparcos* terdapat 17 917 sistem bintang ganda/majemuk yang telah dikenali, dan 4796 sistem yang memiliki galat paralaks yang kurang atau sama dengan 10%.



**Gambar 3.3: Kiri:** Diagram Hertzsprung-Russell dari 16 045 bintang *Hipparcos* dengan  $\sigma_{\pi}/\pi \leq 0.1$ . Sebagai pembanding juga dipetakan titik-titik yang mendefinisikan Deret Utama dan Deret Utama Berusia Nol atau ZAMS (*Zero Age Main Sequence*). **Kanan:** Sama dengan gambar kiri, namun untuk 13 633 bintang tunggal deret utama yang telah memenuhi syarat

Kegandaan/kemajemukan sampel ditentukan dengan mempertimbangkan tiga entri dalam Katalog *Hipparcos*:

1. Nomor CCDM (Kolom No. H55 dalam katalog). Bintang yang memiliki Nomor CCDM berarti sudah dipastikan kegandaannya.
2. Penanda kegandaan/kemajemukan (*Multiplicity Flag*), kolom No. H59. Entri yang tak kosong menunjukkan adanya solusi orbit untuk sistem bintang ganda/majemuk dan memiliki entri tersendiri dalam Aneks Sistem Ganda dan Majemuk (*Double and Multiple System Annex*). Bila entri ini tak kosong berarti kegandaan/kemajemukan sampel telah dipastikan.
3. Penanda kualitas solusi (*Solution quality Flag*), kolom No. H61. Kolom ini mem-

berikan keterangan atas kualitas dari solusi yang ada. Keterangan ini bervariasi dari 'baik' hingga 'tak pasti', dan juga keterangan tambahan 'S' yang merupakan indikasi bahwa sampel dicurigai sebagai tak-tunggal (*suspected non-single*). Bila kolom ini kosong maka sampel dinyatakan sebagai bintang tunggal. Perkecualian diberikan untuk entri dalam *Hipparcos* yang bertanda 'S' pada kolom ini, namun kosong pada kolom Nomor CCDM dan kolom penanda kegandaan/kemajemukan. Entri yang seperti ini, meskipun dicurigai sebagai tak-tunggal, tetap dianggap sebagai bintang tunggal. Keputusan ini diambil karena menurut Katalog, sebagian besar dari entri berlabel 'S' kemungkinan besar adalah bintang tunggal, dan label 'S' diberikan karena variabilitas fotometri atau pencuplikan astrometri yang tak memadai [11, vol. 1, hal. 129].

Diagram Hertzsprung-Russell untuk sampel yang telah terseleksi, bersama dengan garis pemisah yang digunakan untuk menyeleksi bintang-bintang dalam deret utama, ditunjukkan pada bagian kiri Gambar 3.3. Magnitudo mutlak  $M_v$  dihitung dengan menggunakan Rumus Pogson,

$$M_v = V + 5 + \log \pi, \quad (3.1)$$

di mana  $V$  adalah Magnitudo Johnson V yang disertakan dalam Katalog *Hipparcos*. Disertakan pula titik-titik Deret Utama dan Deret Utama Berusia Nol (ZAMS, *Zero Age Main Sequence*).

Garis pemisah yang digunakan untuk menyeleksi bintang-bintang deret utama adalah garis yang dibuat melalui inspeksi visual, namun kita dapat memberikan tingkat keyakinan yang tinggi pada garis pemisah ini karena posisi setiap bintang dalam Diagram Hertzsprung-Russell sudah akurat. Persamaan untuk kedua segmen garis ini adalah:

Segmen atas:

$$M_v = \begin{cases} 7.171(B - V) - 2.849, & (B - V) \leq 0.520, \\ 14.800(B - V) - 6.816, & 0.520 < (B - V) \leq 0.770, \\ 4.685(B - V) + 0.973, & 0.770 < (B - V) \leq 1.500, \\ 20.000(B - V) - 22.000, & (B - V) > 1.500. \end{cases} \quad (3.2)$$



Segmen bawah:

$$M_v = \begin{cases} 3.529(B - V) + 2.765, & (B - V) \leq 0.350, \\ 7.000(B - V) + 1.550, & 0.350 < (B - V) \leq 0.600, \\ 4.231(B - V) + 3.212, & 0.600 < (B - V) \leq 1.300, \\ 16.250(B - V) - 11.813, & (B - V) > 1.300. \end{cases} \quad (3.3)$$

Klasifikasi Spektrum yang disertakan dalam *Hipparcos* tidak digunakan karena klasifikasi ini dikompilasi dari pengamatan landas Bumi (*ground-based*), terutama dari Katalog *Michigan Spectral Survey* (Houk dan Cowley, 1975; Houk 1978, 1982) yang menggunakan prisma dispersi rendah. Kesalahan dalam penentuan Tipe Spektrum dari sumber ini dapat berkisar hingga 30%, sehingga cukup berisiko untuk bersandar pada Katalog *Michigan* dalam menyeleksi bintang-bintang deret utama (Dehnen, komunikasi pribadi). Ada dua kelemahan yang perlu disadari dari penggunaan garis pemisah ini:

1. Kontaminasi oleh bintang-bintang raksasa dan subraksasa pada titik belok kemungkinan besar masih terjadi dan ini adalah hal yang tak bisa dihindari. Seberapa besar kontaminasi yang terjadi juga tak bisa ditentukan.
2. Bintang-bintang pasca-AGB yang bergerak melewati Deret Utama juga dapat mengkontaminasi sampel. Meskipun kontaminasi ini juga tak terhindarkan tetapi karena laju evolusi pada tahapan ini sangat cepat maka peluang terdapat bintang pasca-AGB dalam sampel sangat kecil.

Hasil akhir dari sampel yang memenuhi empat syarat di atas berjumlah 13 633 entri. Sampel inilah yang selanjutnya digunakan untuk menentukan kinematika lokal. Bagian kanan Gambar 3.3 memetakan Diagram Hertzsprung-Russell dari sampel akhir.

Sebagaimana kita lihat dalam bagian kanan Gambar 3.3, Deret Utama tidaklah berupa garis tipis tetapi berupa pita yang pada nilai  $(B - V)$  tertentu memiliki ketebalan dalam arah Magnitudo Mutlak  $M_v$ . Ketebalan pita ini mewakili bintang dengan berbagai umur dan komposisi kimia tertentu. Bila terhadap seluruh sampel dilakukan *binning* dengan lebar tertentu, maka pada *bin* yang berisi bintang-bintang tipe awal kita tidak hanya akan menemukan bintang-bintang ZAMS tipe awal namun berpeluang tinggi pula untuk menemukan bintang-bintang deret utama dalam berbagai usia. Pada *bin* yang berisi

bintang-bintang tipe akhir kita juga akan menemukan bintang-bintang ZAMS tipe akhir dan berpeluang tinggi pula untuk menemukan bintang-bintang deret utama dalam berbagai usia. Teori evolusi bintang mengatakan bahwa sebuah bintang tipe awal kelas O dan B—yang letaknya berada di pojok kiri atas Diagram Hertzsprung-Russell—menghabiskan waktu yang relatif lebih singkat pada Deret Utama daripada bintang tipe akhir kelas G, K, dan M—yang berada di pojok kanan bawah Diagram Hertzsprung-Russell. Dengan demikian bintang-bintang dalam *bin* ( $B - V$ ) berwarna biru akan terdiri atas bintang-bintang berusia muda, sementara bintang-bintang dalam *bin* ( $B - V$ ) berwarna merah akan terdiri atas bintang-bintang berusia tua, sehingga dengan pertimbangan statistik dapat kita katakan bahwa setiap *bin* Indeks Warna ( $B - V$ ) merupakan representasi dari usia bintang. Semakin merah ( $B - V$ ) rata-rata dalam sebuah *bin*, semakin tua rata-rata usia bintang-bintang dalam *bin* tersebut.

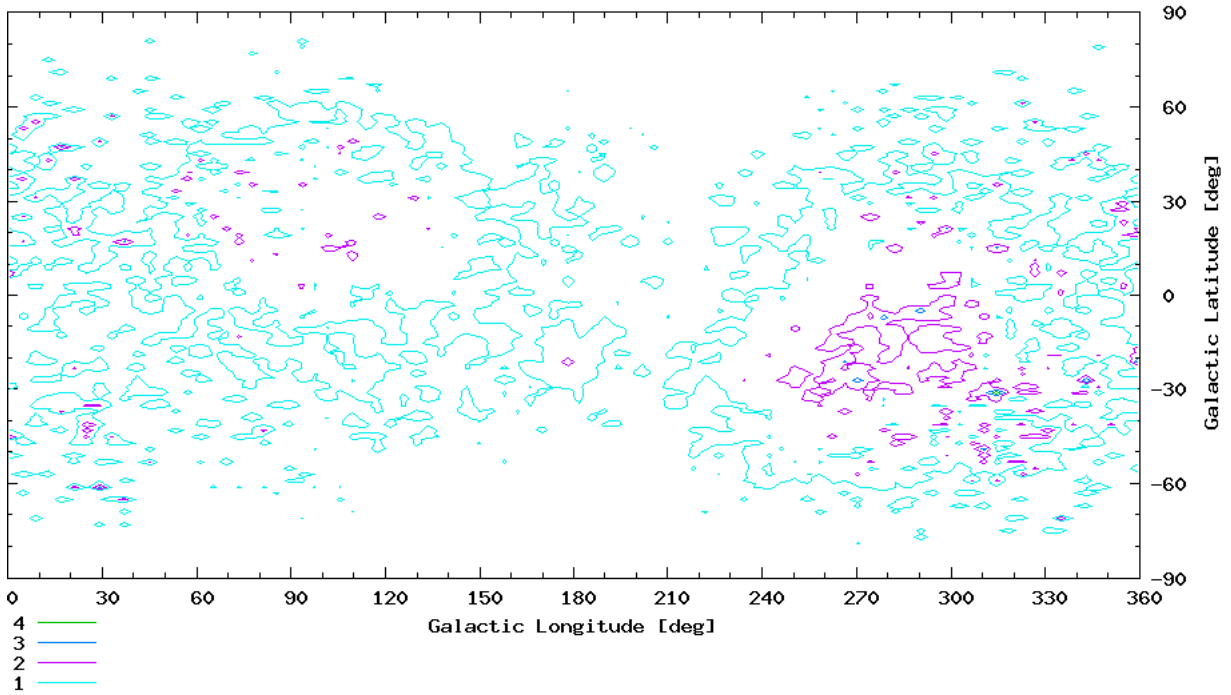
### 3.3 Deskripsi Sampel

Sampel akhir akan dideskripsikan secara statistik, mencakup: distribusi spasial, distribusi jarak, distribusi ( $B - V$ ) dan  $\sigma_{(B-V)}$ , distribusi ekses  $\mu_{l*}$  positif terhadap  $\mu_{l*}$  negatif, dan distribusi vektor kecepatan tangensial.

Distribusi spasial sampel dalam koordinat galaktik dipetakan pada Gambar 3.4. Secara umum sampel terdistribusi isotropik, dengan fluktuasi yang kecil dan dapat diabaikan antara 1  $\sim$  4 bintang. Kerapatan maksimal berada pada arah  $l = 90^\circ$  dan  $l = 300^\circ$ , ini terkait dengan posisi Lengan Orion dari Galaksi kita dan dengan Sabuk Gould (pada  $l = 270^\circ$ ). Konsentrasi pada daerah sekitar  $l = 180^\circ$ ,  $b = -20^\circ$  kemungkinan berkaitan dengan Asosiasi Orion yang posisinya berdekatan.

Dengan seleksi  $\sigma_\pi/\pi \leq 0.1$ , jarak maksimal sampel adalah 218 pc dan hanya satu buah bintang yang berada dalam jarak ini. Selebihnya berada dalam jarak kurang dari 200 pc dan lebih 80% berada dalam jarak kurang dari 100 pc (Gambar 3.5). Jarak ini dianggap sebagai daerah lokal matahari dan absorpsi oleh materi antar bintang dapat diabaikan.

Histogram distribusi ( $B - V$ ) pada bagian atas Gambar 3.6 menunjukkan bahwa sampel didominasi oleh bintang kelas F5 hingga G5, dengan puncak di sekitar ( $B - V$ ) = 0.5 mag. Histogram ini tentu saja tidak dimaksudkan untuk menggambarkan realitas sebe-

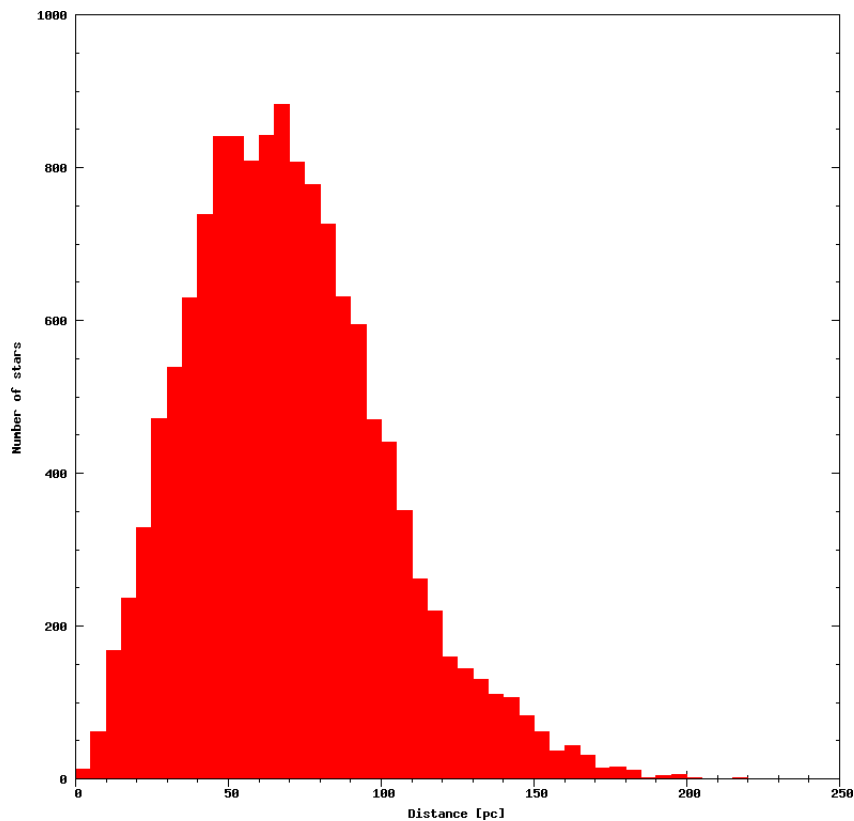


**Gambar 3.4:** Kontur distribusi bintang dalam Koordinat Galaktik  $l$  dan  $b$ . Ukuran  $bin$  adalah  $2^\circ \times 2^\circ$ .

narnya. Pada bagian bawah Gambar 3.6 direproduksi Gambar 3.2.78 dalam Katalog *Hipparcos* [11, Vol. 1, hal. 368], yaitu Histogram distribusi Indeks Warna untuk seluruh data *Hipparcos*. Terlihat bahwa terdapat 2 puncak lagi pada  $(B - V) = 0$  dan  $(B - V) = 1$  mag, dan juga sebuah “benjolan” pada interval  $(B - V) = 1.3 - 1.7$  mag. Ketiga ciri maksimum relatif ini disebabkan masing-masing oleh kontribusi bintang-bintang tipe awal yang sengaja dimasukkan ke dalam program *Hipparcos* untuk studi struktur Galaksi, oleh raksasa kelas G8-K0 yang berada pada tahap pembakaran inti Helium, dan oleh bintang katai kelas dK-dM [11, vol. 1, hal. 325]. Jelas bahwa dua ciri terakhir tak nampak dalam Gambar 3.6 karena dua tipe bintang tersebut tidak termasuk Deret Utama, sementara bintang-bintang tipe awal tidak banyak yang lolos seleksi karena galat paralaksnya yang tidak memenuhi syarat akurasi.

Distribusi  $\sigma_{(B-V)}$  (Gambar 3.7) menunjukkan bahwa 90% sampel memiliki  $\sigma_{(B-V)} \lesssim 0.02$ , nilai yang dapat dianggap sebagai resolusi tertinggi  $(B - V)$  dalam menentukan dua bintang dengan Indeks Warna berbeda.

Gambar 3.8 menampilkan distribusi vektor kecepatan tangensial yang diproyeksikan



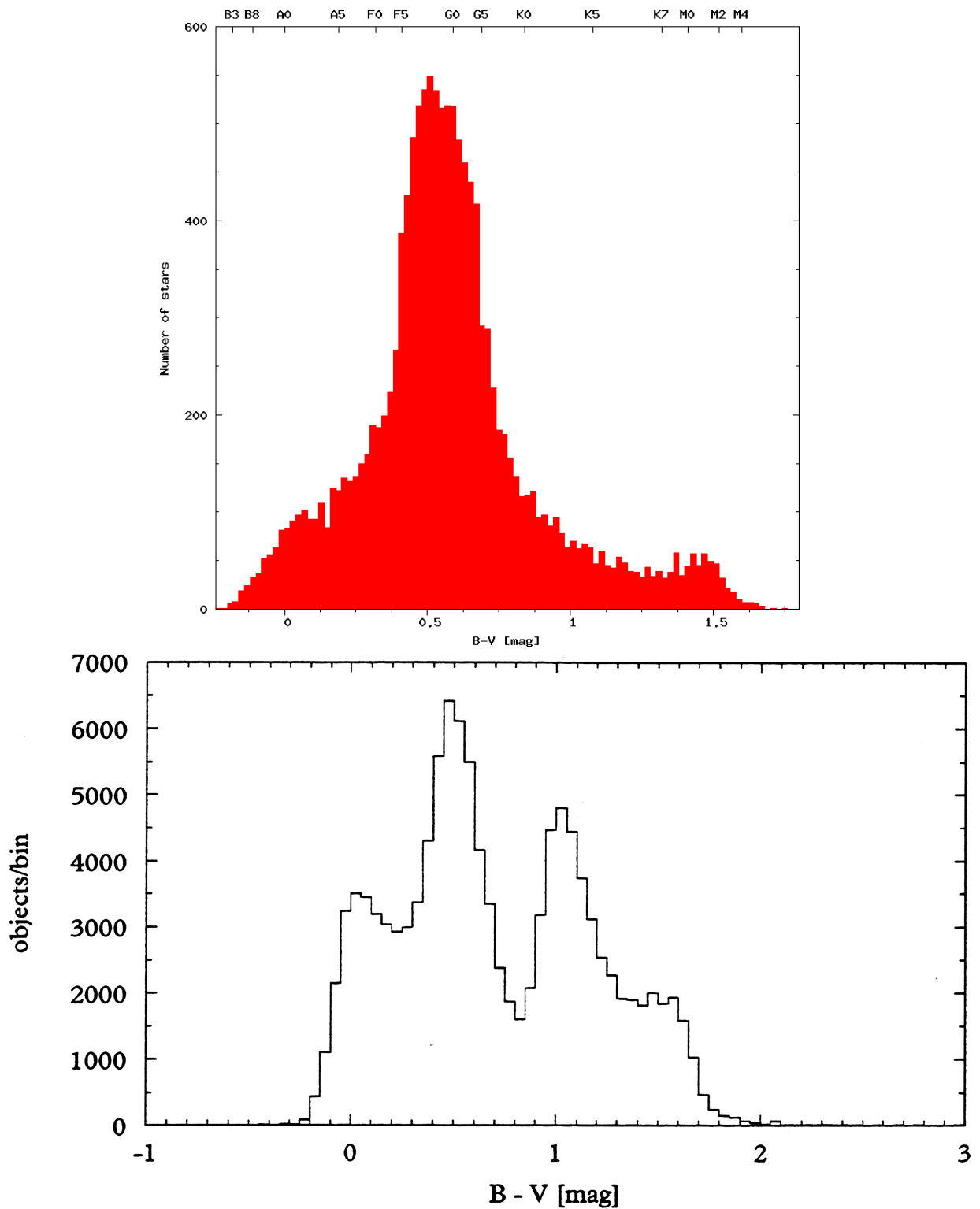
**Gambar 3.5:** Histogram distribusi jarak. Ukuran *bin* adalah 5 pc

pada bidang  $xy$ , atau pada bidang Galaksi. Kecepatan tangensial dari sampel akhir dihitung dengan menggunakan Persamaan 2.3 dan 2.4. Selanjutnya kecepatan tangensial diproyeksikan pada bidang Galaksi lalu dihitung sentroid dari kecepatan tangensial dalam areal seluas  $5 \text{ pc} \times 5 \text{ pc}$ . Titik pusat koordinat adalah matahari, sumbu  $X$  positif berimpit dengan arah Pusat Galaksi, dan sumbu  $Y$  positif berimpit dengan arah Rotasi Galaksi. Dalam Gambar terlihat bahwa semua bintang terlihat mengalir dari satu arah menuju arah yang lain. Pada kuadran pertama, kita dapat melihat arah dari mana bintang-bintang terlihat mengalir, dan pada arah sebaliknya terlihat arah yang dituju semua bintang. Arah datangnya bintang adalah arah apex, sementara arah yang konvergensi semua bintang adalah arah antapex.

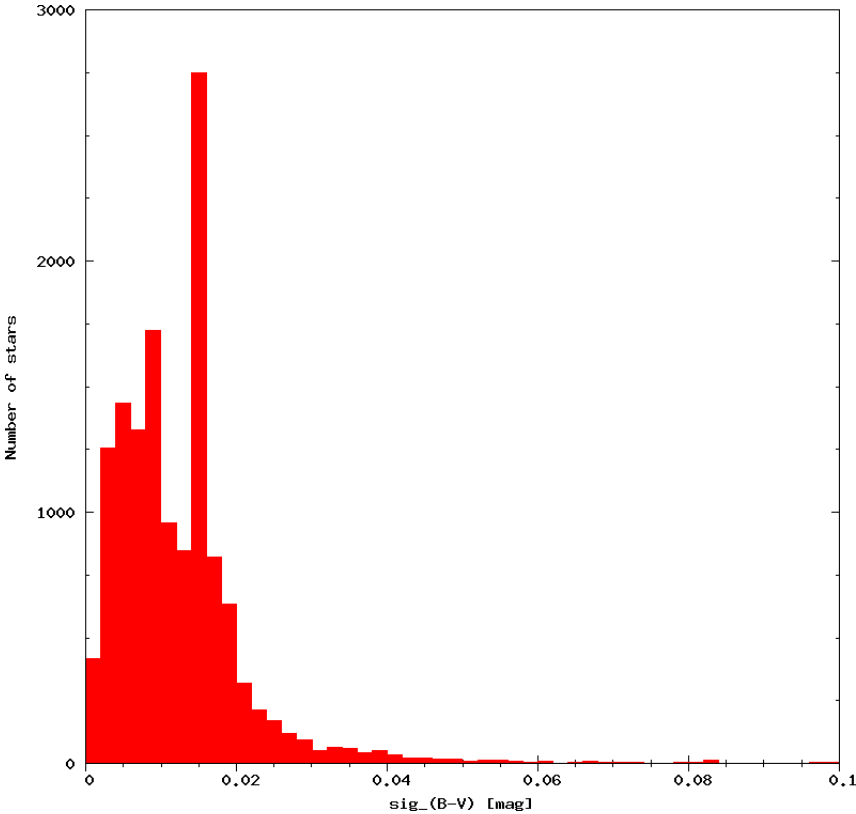
Distribusi ekses  $\mu_{l*}$  positif terhadap  $\mu_{l*}$  negatif adalah distribusi yang digunakan sebagai analisis awal untuk menentukan apex gerak matahari [21, hal. 386-87]. Metode ini dimulai dengan menghitung jumlah  $\mu_{l*}$  yang bernilai positif dan  $\mu_{l*}$  yang bernilai negatif, pada interval  $l$  tertentu. Dalam pekerjaan ini dihitung setiap interval  $10^\circ$ . Ekses  $\mu_{l*}$  posi-

---

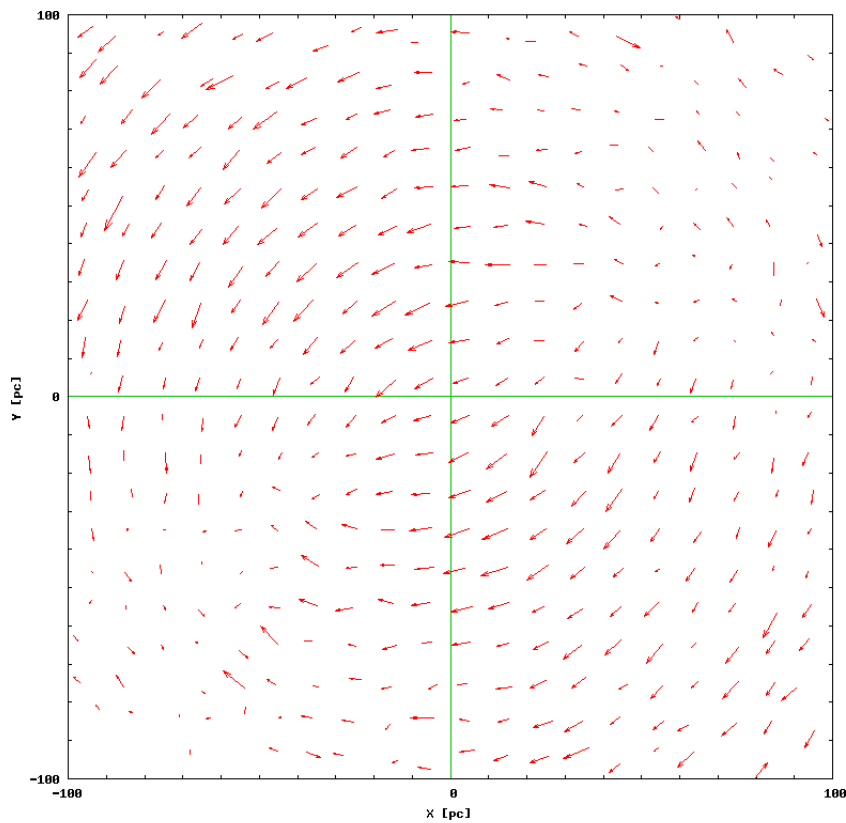
tif terhadap  $\mu_{l^*}$  negatif adalah selisih antara kedua nilai tersebut,  $\mu_{l^*}$  positif -  $\mu_{l^*}$  negatif. Pemetaan akses tersebut ditampilkan dalam Gambar 3.9. Dapat dilihat bahwa titik apex berada dalam arah  $l \approx 50^\circ$ , dan mengkonfirmasi peta distribusi vektor pada Gambar 3.8.



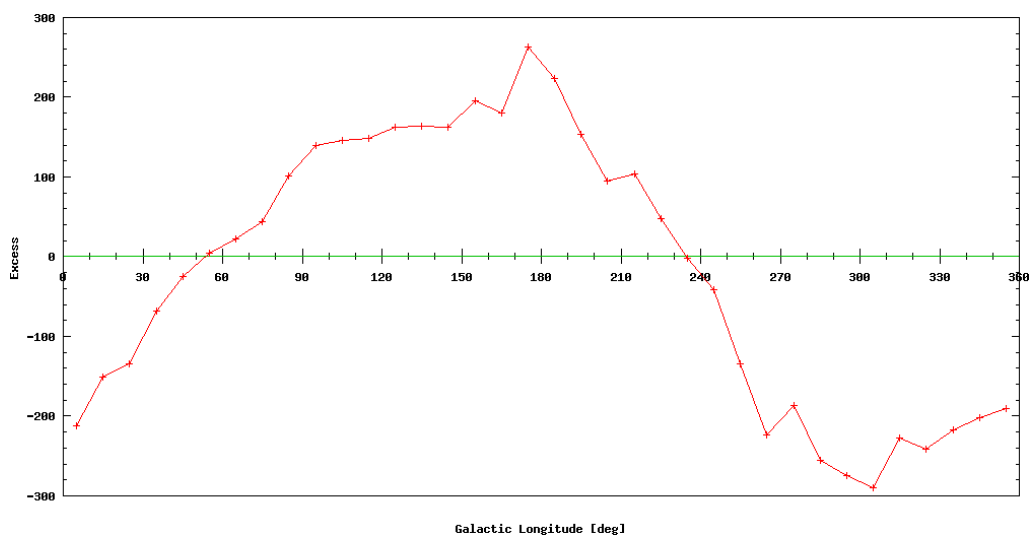
**Gambar 3.6:** Atas: Histogram distribusi Indeks Warna ( $B - V$ ) untuk sampel akhir dalam Tugas Akhir ini. Ukuran *bin* adalah 0.02 mag. Bawah: Histogram distribusi Indeks Warna ( $B - V$ ) untuk seluruh data *Hipparcos*. Sumber: Katalog *Hipparcos*.



Gambar 3.7: Histogram distribusi  $\sigma_{(B-V)}$ . Ukuran *bin* adalah 0.002 mag.



**Gambar 3.8:** Pemetaan vektor rata-rata kecepatan tangensial yang diproyeksikan pada bidang  $xy$ . Titik asal koordinat adalah matahari; sumbu  $X$  positif berimpit dengan arah Pusat Galaksi, ( $l = 0, b = 0$ ); dan sumbu  $Y$  positif berimpit dengan arah Rotasi Galaksi, ( $l = 0, b = 90^\circ$ ). Ukuran  $bin$  adalah  $5 \text{ pc} \times 5 \text{ pc}$ , dan vektor diperbesar untuk menunjukkan arah gerakanya.



**Gambar 3.9:** Distribusi ekses  $\mu_{l*}$  positif terhadap  $\mu_{l*}$  negatif, dengan ukuran  $bin = 10^\circ$



## Bab 4

# Metode Analisis

### 4.1 Persamaan Proyeksi

Karena ketiadaan informasi kecepatan radial  $v_R$  maka vektor kecepatan bintang dalam koordinat bola hanya memiliki 2 dari 3 komponen, yaitu kecepatan tangensial dalam arah bujur galaktik  $l$  dan kecepatan tangensial dalam arah bujur galaktik  $b$ . Ini dinotasikan dengan  $\mathbf{v}_s = (v_l, v_b)$ . Sementara itu vektor kecepatan bintang dalam koordinat kartesius terdiri atas 3 komponen,  $\mathbf{v} = (U, V, W)$ . Hubungan antara keduanya dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mendefinisikan vektor  $\mathbf{p}$  yang merupakan proyeksi  $\mathbf{v}_s$  pada sumbu kartesius (lihat penurunan pada Lampiran B):

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -\sin l & -\cos l \sin b \\ \cos l & -\sin l \sin b \\ 0 & \cos b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_l \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_l \sin l - v_b \cos l \sin b \\ v_l \cos l - v_b \sin l \sin b \\ v_b \cos b \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Pada dasarnya 4.1 adalah Persamaan B.4 dalam Lampiran B, hanya saja tanpa mengandung kolom pertama dari matriks  $\gamma$ .

Proyeksi  $\mathbf{v}$  pada bidang langit untuk memperoleh  $\mathbf{v}_s = (v_{T_l}, v_{T_b})$  dilakukan dengan mengalikan matriks  $\gamma^T$ —yang dipotong baris pertamanya—dengan vektor  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{bmatrix} v_l \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin l & \cos l & 0 \\ -\cos l \sin b & -\sin l \sin b & \cos b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Bila kedua ruas dikalikan dengan matriks  $3 \times 2$  pada persamaan 4.1, pada ruas kiri kita akan memperoleh  $\mathbf{p}$  dan pada ruas kanan akan diperoleh operator berbentuk matriks  $3 \times 3$  yang kita notasikan dengan  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.3)$$

Matriks  $\mathbf{A}$  akan berbentuk

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin l & -\cos l \sin b \\ \cos l & -\sin l \sin b \\ 0 & \cos b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin l & \cos l & 0 \\ -\cos l \sin b & -\sin l \sin b & \cos b \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

yang juga dapat didefinisikan sebagai

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.5)$$

dengan  $\hat{\mathbf{r}}$  adalah vektor satuan yang merupakan arah menuju bintang:

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \cos l \cos b \\ \sin l \cos b \\ \sin b \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Matriks  $\mathbf{A}$  adalah operator yang memproyeksikan  $\mathbf{v}$  pada bidang langit. Matriks ini simetris, mengikuti hukum  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ , dan juga singular. Dengan demikian kita tak dapat menginvers 4.3 untuk menentukan  $\mathbf{v}$  kecuali kita mengetahui komponen kecepatan radial.

## 4.2 Gerak Rata-Rata

Sebagaimana telah dijelaskan dalam Bab 2.2.3, gerak lokal matahari adalah kebalikan arah dari gerak heliosentrik rata-rata dari sekelompok bintang di sekitar matahari,  $\mathbf{v}_{\odot} = -\langle \mathbf{v} \rangle$ . Untuk sampel bintang-bintang terdekat yang tak bias kita dapat mengasumsikan bahwa vektor arah  $\hat{\mathbf{r}}$  tidak berkorelasi dengan vektor kecepatan  $\mathbf{v}$  [8]. Dengan asumsi ini, perataan dari Persamaan 4.3 akan menghasilkan  $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{A} \rangle \cdot \langle \mathbf{v} \rangle$ , yang dapat diinverskan untuk menghasilkan

$$-\mathbf{v}_{\odot} = \langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} \cdot \langle \mathbf{p} \rangle. \quad (4.7)$$

Selanjutnya, sesuai dengan Persamaan 2.7, kita dapat mendefinisikan kecepatan diri bintang dengan

$$\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{p}' \equiv \mathbf{p} - \mathbf{A} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle, \quad (4.9)$$

dan mendefinisikan

$$S^2 \equiv \langle |\mathbf{p}'|^2 \rangle. \quad (4.10)$$

Bila Persamaan 4.10 diturunkan terhadap  $\mathbf{v}$ , dapat ditunjukkan bahwa substitusi  $\langle \mathbf{v} \rangle$  ke dalam hasil penurunan tersebut akan bernilai nol, artinya  $\langle \mathbf{v} \rangle$  meminimalkan  $S^2$ . Dengan bantuan Persamaan 4.3 dan Persamaan 4.5 dapat ditunjukkan pula bahwa

$$S^2 = \langle |\mathbf{v}'|^2 \rangle - \langle (\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \rangle. \quad (4.11)$$

Dengan demikian  $S^2$  adalah dispersi kecepatan dari sekelompok bintang yang dihitung gerak rata-ratanya.

### 4.3 Tensor Dispersi Kecepatan

Tensor dispersi kecepatan yang menggambarkan bentuk elipsoid kecepatan, sebagaimana telah dijelaskan dalam Bab 2.3, dapat diperoleh dari Persamaan 4.3:

$$\mathbf{p}' \otimes \mathbf{p}' = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}') \otimes (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}') = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'). \quad (4.12)$$

Tensor dispersi kecepatan  $\sigma^2$  adalah perata-rataan  $(\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}')$ , sehingga setelah perata-rataan 4.12 kita dapat mencari solusi untuk  $\sigma^2$  dengan cara yang sama dengan perhitungan  $\langle \mathbf{v} \rangle$  pada Bab 4.2. Perata-rataan 4.12 akan menghasilkan

$$\langle \mathbf{p}' \otimes \mathbf{p}' \rangle = \langle \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle. \quad (4.13)$$

Bila kita notasikan Persamaan 4.13 dengan  $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle \cdot \langle \mathbf{s} \rangle$ , di mana  $\mathbf{u} = (\mathbf{p}' \otimes \mathbf{p}')$ ,  $\mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})$ , dan  $\mathbf{s} = (\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}')$ , maka tensor  $\sigma^2$  dapat ditentukan dengan menghitung

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle^{-1} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle. \quad (4.14)$$

## 4.4 Galat

Persamaan-persamaan yang telah diturunkan sejauh ini belum memperhitungkan 1) Derau Poisson (*Poisson noise*) yang muncul karena terbatasnya jumlah sampel, dan 2) Galat acak (*random error*) dalam data *Hipparcos*.

### 4.4.1 Derau Poisson

Bila perhitungan gerak rata-rata dilakukan untuk sejumlah  $N$  data di dalam sebuah *bin* dari sampel, maka distribusi data di dalam selang *bin* tersebut akan mengikuti distribusi Poisson karena terdapat sejumlah  $N$  data yang berhingga di dalam sebuah selang. Terlebih lagi jumlah sampel dalam *bin* menjadi jauh lebih kecil dari jumlah yang diharapkan. Ketidakpastian akibat jumlah data yang berhingga ini dapat dihitung dengan [3]

$$\sigma_{Poisson}^2(\langle \mathbf{v} \rangle) = N^{-1} \sigma^2(\langle \mathbf{v} \rangle). \quad (4.15)$$

Varians  $\mathbf{v}$  dapat ditentukan melalui

$$\sigma^2(\langle \mathbf{v} \rangle) = \langle (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle = \langle (\mathbf{v}')^2 \rangle, \quad (4.16)$$

dan dengan menggunakan Persamaan 4.8 dan 4.3, dapat ditunjukkan bahwa 4.15 akan sama dengan

$$\sigma_{Poisson}^2(\langle \mathbf{v} \rangle) = N^{-1} \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} S^2. \quad (4.17)$$

Dengan menggunakan Persamaan 4.15 maka dapat dihitung derau Poisson untuk  $S^2$  dan  $\sigma^2$  masing-masing adalah

$$\sigma_{Poisson}^2(S^2) = N^{-1} \left( \langle |\mathbf{p}'|^4 \rangle - \langle |\mathbf{p}'|^2 \rangle^2 \right), \quad (4.18)$$

$$\sigma_{Poisson}^2(\langle \mathbf{s} \rangle) = N^{-1} \langle \mathbf{B} \rangle^{-1} \cdot \langle |\mathbf{u} - \mathbf{B} \cdot \langle \mathbf{s} \rangle|^2 \rangle \quad (4.19)$$

### 4.4.2 Galat Acak

Sumber galat acak dalam data *Hipparcos* bersumber dari pengukuran posisi, paralaks, dan gerak diri. Kesalahan pengukuran posisi sangat kecil sehingga dapat diabaikan dalam perhitungan-perhitungan yang melibatkan variabel posisi, misalnya dalam transformasi

koordinat. Galat acak dihitung dengan menggunakan persamaan perambatan kesalahan (Persamaan E.9) yang telah diturunkan pada Lampiran E. Persamaan ini digunakan untuk menghitung  $(\sigma(\mu_{l*}), \sigma(\mu_b))$  dengan menggunakan data  $(\sigma(\mu_{\alpha*}), \sigma(\mu_\delta))$  dari *Hipparcos*. Selanjutnya  $(\sigma(\mu_{l*}), \sigma(\mu_b))$  bersama-sama dengan  $\sigma(\pi)$  digunakan untuk menghitung  $(\sigma(v_{T_l}), \sigma(v_{T_b}))$  yang pada gilirannya digunakan untuk menentukan  $\sigma(\mathbf{p})$ .

Selanjutnya galat acak  $\langle \mathbf{p} \rangle$  dihitung dengan

$$\sigma(\langle \mathbf{p} \rangle) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma^2(\mathbf{p}_i)}, \quad (4.20)$$

dan varians dari komponen ke- $i$  dari  $\langle \mathbf{v} \rangle$  adalah

$$\sigma^2(\langle \mathbf{v}_i \rangle) = \sum_{j=1}^3 \langle \mathbf{A}_{ij} \rangle^{-2} \sigma^2(\langle \mathbf{p}_j \rangle). \quad (4.21)$$

Galat total adalah resultan dari derau Poisson dan galat acak:

$$\sigma^2 = \sigma_{Poisson}^2 + \sigma_{acak}^2. \quad (4.22)$$

Dalam semua kasus galat acak berada dalam orde  $10^{-2}$  hingga  $10^{-3}$  dan pada dasarnya dapat diabaikan dibandingkan derau Poisson yang lebih dominan.

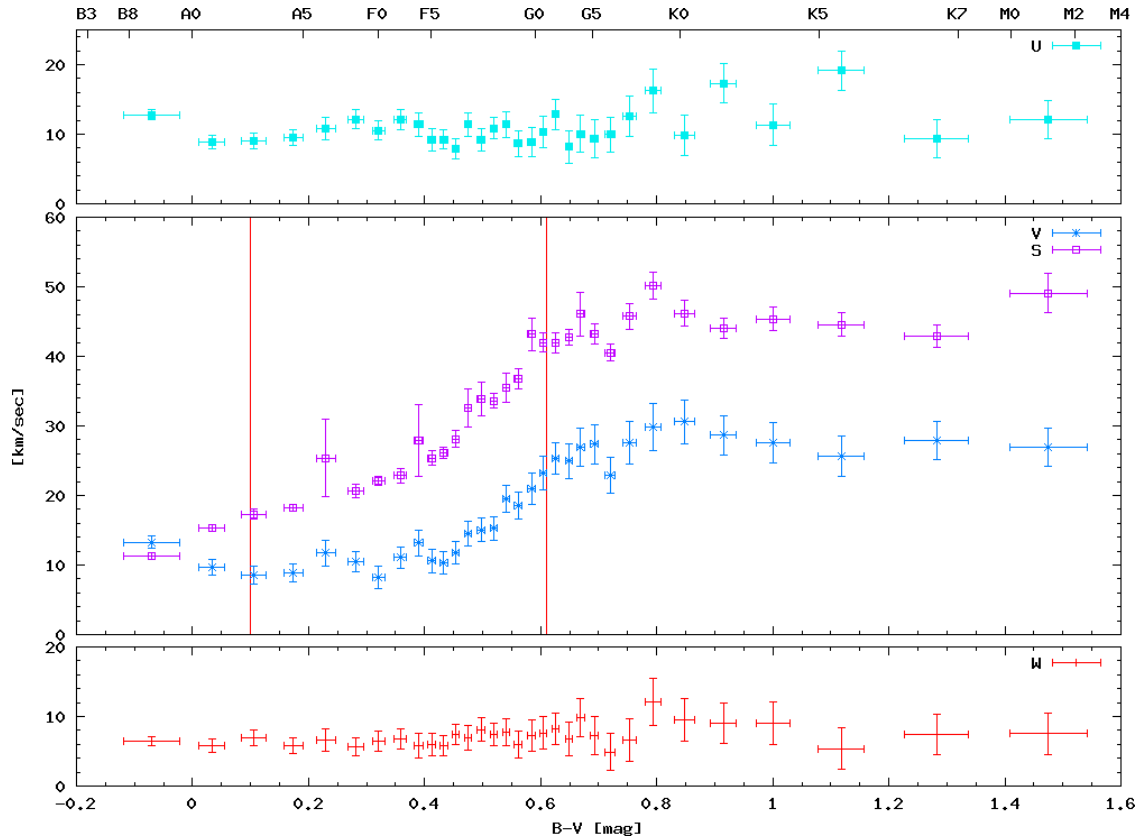
# Bab 5

## Hasil Perhitungan

### 5.1 Gerak Lokal Matahari

Dalam perhitungan Gerak Lokal Matahari, dilakukan *binning* terhadap sampel sedemikian rupa sehingga lebar setiap *bin* tidak kurang dari 0.02 magnitudo dan jumlah sampel di dalamnya tidak kurang dari 350 buah bintang. Dalam menentukan lebar minimal *bin* dan jumlah minimal data, perlu diingat bahwa *bin* yang lebar dapat menghilangkan detail-detail yang menggambarkan kebergantungan  $\mathbf{v}_{\odot}$  dan  $S$  terhadap  $(B - V)$  namun *bin* yang sempit dapat mengurangi jumlah data dalam *bin* dan meningkatkan derau Poisson. Penentuan lebar minimal *bin* dan jumlah minimal data dalam *bin* yang dapat memberikan nilai optimum dengan demikian merupakan sebuah kompromi antara kebutuhan untuk mempertahankan galat relatif yang cukup kecil dalam  $\mathbf{v}_{\odot}$  dan  $S$ , dengan kebutuhan untuk mempertahankan struktur-struktur penting dalam data [3].

Lebar *bin* yang optimum ditentukan dari kesalahan pengukuran  $(B - V)$ . *Bin* yang lebarnya lebih sempit dari rata-rata  $\sigma_{(B-V)}$  tidak akan banyak berguna karena tidak ada kepastian apakah memang sampel memang seharusnya berada di dalam *bin* tersebut. Gambar 3.7 yang menggambarkan distribusi  $\sigma_{(B-V)}$  menunjukkan bahwa  $> 90\%$  sampel memiliki  $\sigma_{(B-V)} \lesssim 0.02$  mag, sehingga cukup aman untuk mengadopsi lebar *bin* = 0.02 mag sebagai lebar yang optimum. Jumlah minimal data akan menentukan besarnya Derau Poisson dan juga jumlah *bin* yang dapat dihasilkan. Semakin banyak data dalam *bin*, semakin kecil Derau Poisson namun detail-detail akan hilang, sementara kurangnya

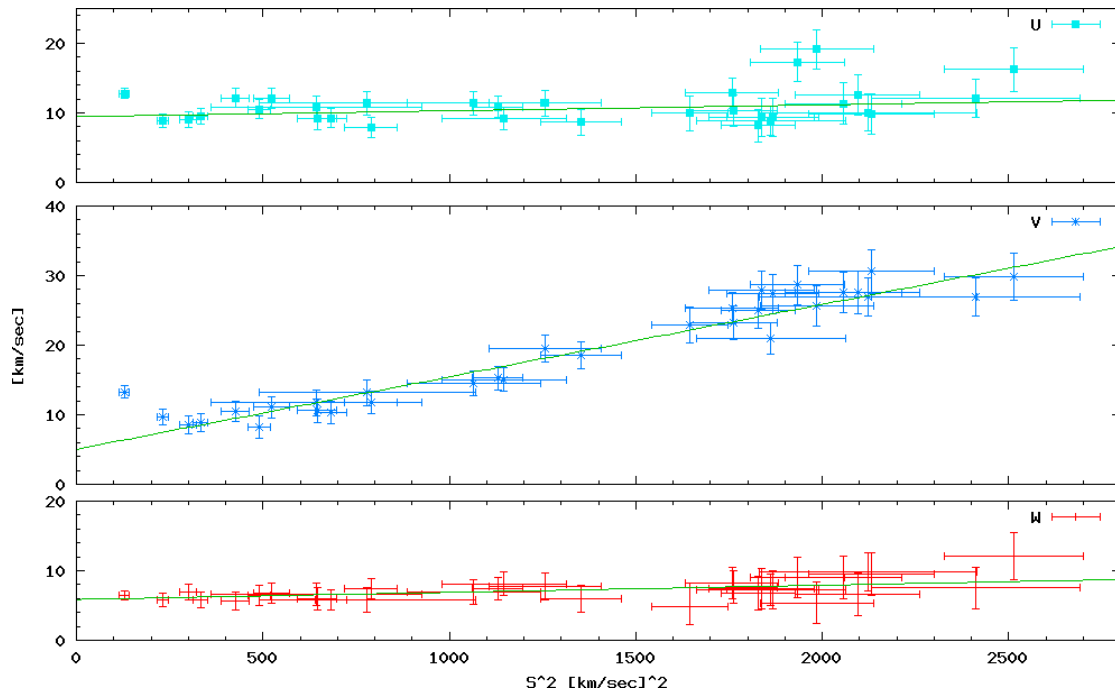


**Gambar 5.1:** Komponen kecepatan  $U_{\odot}$ ,  $V_{\odot}$ ,  $W_{\odot}$ , dan dispersi kecepatan  $S$  relatif terhadap indeks warna  $(B - V)$ . Garis merah sebelah kiri pada  $(B - V) = 0.1$  menandai daerah di mana bintang-bintang yang lebih biru dari garis tersebut tak lagi mengikuti hubungan aliran asimetris, sementara garis merah sebelah kanan pada  $(B - V) = 0.61$  menandai diskontinuitas Parenago di mana kecepatan bintang-bintang yang lebih merah dari garis tersebut tak lagi bergantung pada Indeks Warna

jumlah data akan meningkatkan derau Poisson. Dengan mempertimbangkan ini, diambil jumlah minimal data dalam setiap *bin* adalah 350 bintang.

Hasil perhitungan untuk setiap *bin* ditampilkan dalam Tabel 5.1 dan Gambar 5.1 memetakan  $\mathbf{v}_{\odot} = -\langle \mathbf{v} \rangle$ , yaitu gerak matahari relatif terhadap bintang-bintang dalam *bin*, dan  $S$ , yang merupakan dispersi kecepatan dari bintang-bintang dalam *bin*, terhadap  $(B - V)$  rata-rata.  $U$ ,  $V$ , dan  $W$  adalah komponen  $\mathbf{v}_{\odot}$  dalam arah  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$ , dan  $\hat{\mathbf{z}}$  sebagaimana telah dijelaskan dalam Bab 4.

Komponen  $U_{\odot}$  dan  $W_{\odot}$  tidak banyak berubah secara signifikan dari *bin* ke *bin*, semen-



**Gambar 5.2:** Kebergantungan  $U_{\odot}$ ,  $V_{\odot}$ , dan  $W_{\odot}$  terhadap  $S^2$ . Garis lurus merupakan *fitting* yang dilakukan dengan metode kuadrat terkecil.

tara komponen  $V_{\odot}$  maupun dispersi  $S$  nampak meningkat secara sistematis dari bintang tipe awal ke tipe akhir. Titik-titik pada  $V_{\odot}$  dan  $S$  menunjukkan diskontinuitas Parenago yaitu adanya perubahan tiba-tiba gradien kurva dari semula bernilai positif menjadi nol, di sekitar  $(B - V) \approx 0.61$ . Diskontinuitas Parenago diduga muncul karena usia rata-rata bintang yang lebih biru dari titik diskontinuitas tersebut menurun dengan semakin birunya bintang, sementara bintang yang lebih merah dari titik diskontinuitas usianya tidak bergantung pada warna.

## 5.2 Gerak Matahari Relatif terhadap LSR

Gambar 5.2 memetakan komponen  $U_{\odot}$ ,  $V_{\odot}$ , dan  $W_{\odot}$  terhadap  $S^2$ . Untuk  $S \gtrsim 15 \text{ km s}^{-1}$ , tampak jelas adanya hubungan linear antara  $V_{\odot}$  dengan  $S^2$  sebagaimana diprediksikan oleh persamaan aliran asimetris Strömberg yang dinyatakan oleh Persamaan 2.66. Komponen  $V_{\odot}$  meningkat seiring dengan meningkatnya  $S^2$  karena semakin besar dispersi kecepatan sebuah kelompok bintang, semakin lambat kecepatannya mengelilingi Pusat



Galaksi dan semakin cepat pula Matahari bergerak relatif terhadap kerangka acuan kelompok tersebut.

Untuk bintang-bintang tipe awal dengan  $(B - V) \lesssim 0.1$  dan/atau  $S \lesssim 15 \text{ km s}^{-1}$ , Komponen  $V_{\odot}$  dari  $\mathbf{v}_{\odot}$  menurun dengan meningkatnya  $S$ , Indeks Warna, dan Usia. Dengan demikian bintang-bintang tipe ini melanggar penjelasan dalam paragraf sebelumnya. Ada beberapa penjelasan mengapa bintang-bintang jenis ini melanggar tren secara umum. Pertama, bintang-bintang jenis ini sangat muda sehingga kemungkinan besar tidak terdiri atas sampel yang telah bergabung dengan rotasi Galaksi secara umum; kebanyakan dari mereka masih bergerak di sekitar orbit awan-awan tempat mereka dilahirkan dan belum memanas. Kedua, persamaan aliran asimetris Strömberg memprediksikan hubungan linear antara  $V$  dan dispersi  $S^2$  hanya jika bentuk elipsoid kecepatannya tidak bergantung pada  $S$ . Bintang-bintang muda kemungkinan melanggar asumsi ini.

Komponen kecepatan Matahari relatif terhadap LSR dapat ditentukan dengan menghitung kecepatan  $\mathbf{v}_{\odot}$  pada dispersi  $S = 0$ . Untuk itu digunakan regresi linear terbobot (Lampiran F). Dengan tidak mengikutkan kelompok bintang yang lebih biru dari  $B - V = 0$  diperoleh

$$\begin{aligned} U_0 &= 9.30 \pm 0.54 \text{ km s}^{-1}, \\ V_0 &= 5.14 \pm 0.61 \text{ km s}^{-1}, \\ W_0 &= 5.73 \pm 0.55 \text{ km s}^{-1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dengan komponen kecepatan ini, maka kecepatan matahari relatif terhadap LSR adalah  $12.23 \pm 1.10 \text{ km s}^{-1}$  dengan arah apex  $(l_A, b_A)$  adalah  $(28.91^\circ \pm 3.23^\circ, 28.33^\circ \pm 3.37^\circ)$ .

Kita dapat menggunakan kecepatan Matahari relatif terhadap LSR untuk menghitung  $\langle v_y \rangle$  yaitu kecepatan bintang relatif terhadap LSR dari kelompok bintang kita, dengan menggunakan persamaan aliran asimetris Strömberg:

$$-\langle v_y \rangle = V_0 - \langle v_{\phi} \rangle = \sigma_{xx}^2/k, \tag{5.2}$$

di mana  $k = 97 \pm 5 \text{ km s}^{-1}$  adalah resiprok dari gradien garis yang memetakan hubungan linear  $\langle V \rangle$  terhadap  $S^2$  (Gambar 5.2).

### 5.3 Tensor Dispersi Kecepatan

Sampel dibagi ke dalam 10 buah *bin* terhadap  $(B - V)$  dengan jumlah bintang yang sama dalam setiap *bin*. Karena dalam Persamaan 4.12 terjadi perkalian kuadrat dari kecepatan tangensial, maka galat acak pada dispersi akan berlipat ganda dan demikian pula derau Poisson. Karena galat didominasi oleh Derau Poisson maka konsekuensinya jumlah data dalam setiap *bin* harus ditambah. Tensor dispersi kecepatan ditentukan dengan metode yang telah dijelaskan dalam Bab 4 dan hasilnya ditampilkan dalam Tabel 5.2 dan Gambar 5.3. Gambar 5.3 juga memetakan kecepatan rata-rata dalam arah rotasi  $\langle v_\phi \rangle \equiv \langle v_y \rangle + V_0$ , di mana  $-\langle v_y \rangle$  ditentukan oleh Persamaan 5.2. Sekali lagi diskontinuitas Parenago terlihat dalam pemetaan  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ , dan  $\sigma_{zz}$  terhadap  $B - V$ , meskipun—karena ukuran *bin* yang lebih besar—tidak sejelas yang ditunjukkan dalam Gambar 5.1. Urutan komponen diagonal  $\sigma^2$  selalu sama untuk setiap bin:  $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} > \sigma_{zz}$ .

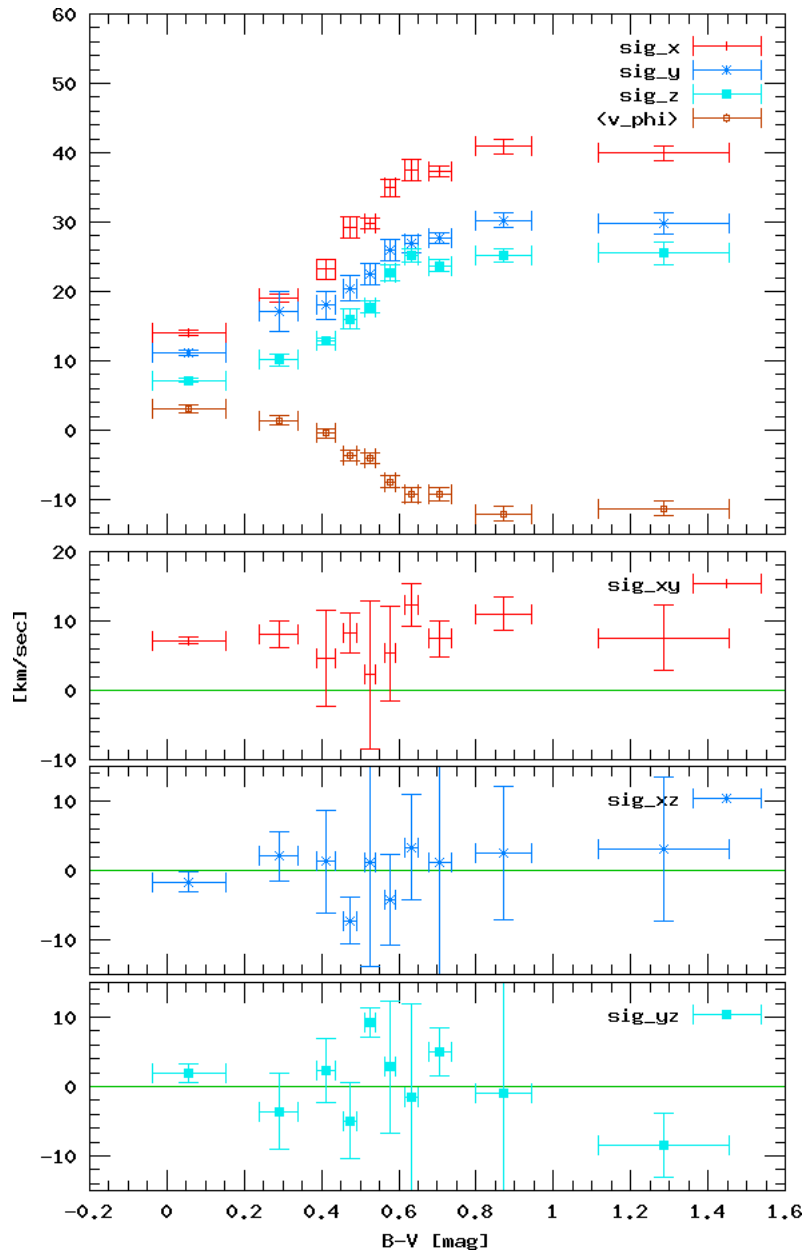
Tiga Grafik terbawah dalam Gambar 5.3 memetakan

$$\sigma'_{ij} = \text{sign}(\sigma_{ij}^2) |\sigma_{ij}^2|^{1/2}, \quad (5.3)$$

yaitu komponen campuran dari tensor dispersi kecepatan  $\sigma^2$ . Nampak bahwa momen campuran yang melibatkan gerak vertikal, yaitu  $\sigma'_{xz}$  dan  $\sigma'_{yz}$ , nilainya berada di sekitar nol. Di sisi lain, momen campuran pada bidang Galaksi,  $\sigma'^2_{xy}$ , tidak bernilai nol. Hal ini tidak dibolehkan dalam Galaksi yang aksisimetris dan tercampur dengan baik (*well-mixed*) [8]. Ini berarti sumbu utama dari elipsoid kecepatan tidak searah dengan ketiga sumbu kartesius yang menjadi kerangka acuan kita. Panjang ketiga sumbu semimayor dari elipsoid kecepatan dapat ditentukan dengan menghitung nilai eigen  $\sigma_i^2$  dari tensor  $\sigma^2$ , dengan hasilnya ditampilkan pada Tabel 5.3. Untuk bintang-bintang yang lebih merah dari  $(B - V) \approx 0.1$ , rata-rata rasio  $\sigma_1/\sigma_2 \approx 1.35$  dan  $\sigma_1/\sigma_3 \approx 1.70$ , dengan tren ke arah nilai yang lebih kecil pada warna yang lebih merah. Juga diberikan dalam Tabel 5.3 adalah deviasi verteks yang merupakan bujur Galaktik dari  $\sigma_1^2$ , dihitung dengan menggunakan Persamaan 2.20. Pemetaan  $l_v$  sebagai fungsi Indeks Warna ditampilkan dalam Gambar 5.4. Terlihat bahwa terdapat tren peningkatan  $l_v$  dengan semakin birunya bintang, dengan  $l_v$  yang searah dengan arah menuju Pusat Galaksi ( $l = 0, b = 0$ ) berada pada  $(B - V) \approx 0.6$ . Kita sudah melihat bahwa kinematika bintang-bintang yang lebih merah dari Diskontinuitas Parenago tidak bergantung pada  $(B - V)$ , sehingga masuk akal

---

untuk menggabungkan seluruh 5250 bintang tersebut ke dalam satu *bin* tunggal. Hasil perhitungan dari kelompok ini diberikan pada baris terakhir dalam Tabel 5.2 dan 5.3.



**Gambar 5.3:** Dispersi kecepatan dalam  $bin$  ( $B - V$ ) yang berbeda-beda. Grafik teratas menunjukkan dispersi kecepatan dalam 3 sumbu utama dan kecepatan rata-rata dalam arah rotasi (nilai negatif mengimplikasikan ketertinggalan terhadap kecepatan rotasi LSR). Tiga grafik ter bawah memetakan  $\sigma_{ij} = \text{sign}(\sigma_{ij}^2) |\sigma_{ij}^2|^{1/2}$ .

**Tabel 5.1:** Hasil perhitungan komponen kecepatan  $U_{\odot}$ ,  $V_{\odot}$ ,  $W_{\odot}$ , kecepatan gerak  $S^2$ , dispersi  $S^2$  dan koordinat apex ( $l_A$ ,  $b_A$ ) untuk setiap  $bin$ . Ditunjukkan pula parameter statistik setiap  $bin$  yaitu nilai minimal dan maksimal ( $B - V$ ) dari setiap  $bin$ , titik tengah, deviasi standar, lebar  $bin$  dan jumlah data di dalam setiap  $bin$ .

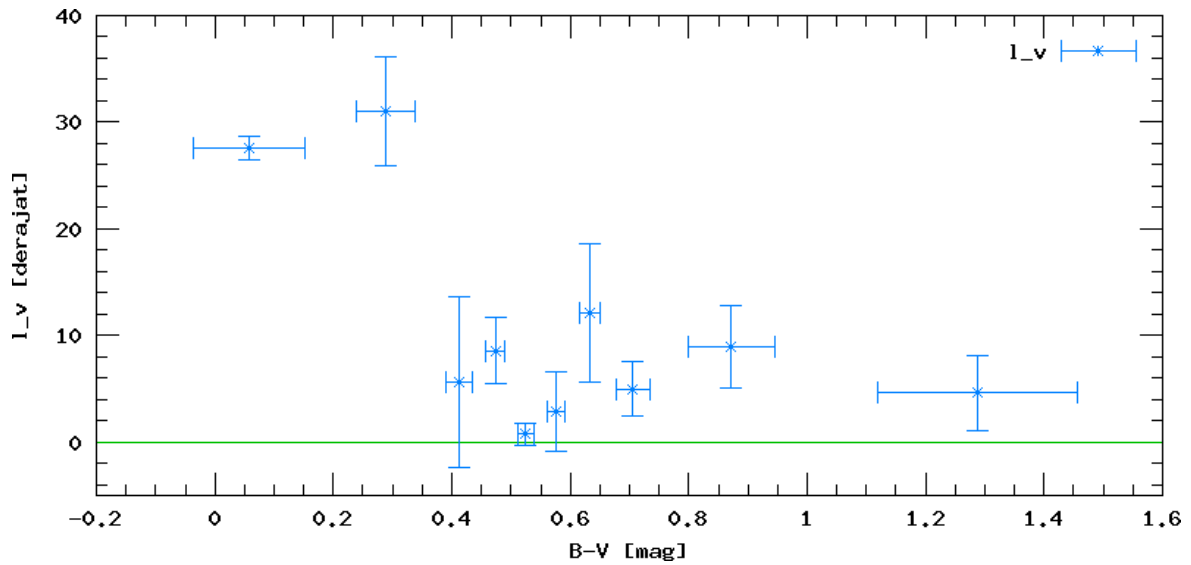
$bin$	$(B - V)$	min	max	titik tengah	deviasi standar	lebar $bin$	jumlah data	$U_{\odot}$ km sec $^{-1}$	$V_{\odot}$ km sec $^{-1}$	$W_{\odot}$ km sec $^{-1}$	$S_{\odot}$ km sec $^{-1}$	$S^2$ (km sec $^{-1}$ ) $^2$	$l_A$ ( $^{\circ}$ )	$b_A$ ( $^{\circ}$ )
1	-0.224	-0.006	0.070	-0.070	0.048	0.218	353	12.77 $\pm$ 0.71	13.26 $\pm$ 0.92	6.47 $\pm$ 0.68	19.51 $\pm$ 0.81	127.88 $\pm$ 12.17	46.09 $\pm$ 2.55	19.37 $\pm$ 2.05
2	-0.005	0.069	0.140	0.033	0.022	0.074	350	8.84 $\pm$ 0.97	9.70 $\pm$ 1.15	5.83 $\pm$ 0.94	14.36 $\pm$ 1.05	232.87 $\pm$ 15.19	47.65 $\pm$ 4.61	23.95 $\pm$ 3.83
3	0.070	0.140	0.202	0.106	0.021	0.070	351	9.06 $\pm$ 1.08	8.52 $\pm$ 1.28	6.88 $\pm$ 1.11	14.21 $\pm$ 1.16	299.91 $\pm$ 23.07	43.26 $\pm$ 5.49	28.94 $\pm$ 4.54
4	0.141	0.202	0.257	0.174	0.017	0.061	354	9.56 $\pm$ 1.14	8.86 $\pm$ 1.30	5.84 $\pm$ 1.16	14.28 $\pm$ 1.21	332.49 $\pm$ 20.06	42.82 $\pm$ 5.41	24.15 $\pm$ 4.69
5	0.203	0.257	0.302	0.230	0.016	0.054	361	10.77 $\pm$ 1.57	11.70 $\pm$ 1.80	6.60 $\pm$ 1.61	17.22 $\pm$ 1.68	643.17 $\pm$ 283.21	47.38 $\pm$ 6.04	22.54 $\pm$ 5.40
6	0.258	0.302	0.339	0.281	0.014	0.044	351	12.16 $\pm$ 1.32	10.42 $\pm$ 1.46	5.67 $\pm$ 1.30	16.99 $\pm$ 1.37	426.40 $\pm$ 37.54	40.62 $\pm$ 5.01	19.51 $\pm$ 4.43
7	0.303	0.339	0.374	0.321	0.011	0.036	350	10.53 $\pm$ 1.38	8.20 $\pm$ 1.56	6.47 $\pm$ 1.44	14.83 $\pm$ 1.45	489.67 $\pm$ 30.12	37.89 $\pm$ 6.42	25.85 $\pm$ 5.56
8	0.340	0.374	0.401	0.358	0.010	0.034	367	12.08 $\pm$ 1.40	11.05 $\pm$ 1.55	6.81 $\pm$ 1.46	17.74 $\pm$ 1.47	523.23 $\pm$ 49.29	42.45 $\pm$ 5.19	22.59 $\pm$ 4.72
9	0.375	0.401	0.422	0.389	0.008	0.026	369	11.40 $\pm$ 1.74	13.18 $\pm$ 1.86	5.75 $\pm$ 1.79	18.35 $\pm$ 1.81	780.42 $\pm$ 289.75	49.13 $\pm$ 5.89	18.28 $\pm$ 5.60
10	0.402	0.422	0.443	0.412	0.006	0.020	367	9.18 $\pm$ 1.57	10.57 $\pm$ 1.72	6.01 $\pm$ 1.63	15.23 $\pm$ 1.65	645.28 $\pm$ 53.70	49.03 $\pm$ 6.69	23.24 $\pm$ 6.13
11	0.423	0.443	0.464	0.433	0.006	0.020	473	9.27 $\pm$ 1.43	10.31 $\pm$ 1.56	5.79 $\pm$ 1.46	15.03 $\pm$ 1.50	682.74 $\pm$ 41.29	48.03 $\pm$ 6.15	22.67 $\pm$ 5.58
12	0.444	0.464	0.485	0.454	0.006	0.020	519	7.93 $\pm$ 1.48	11.73 $\pm$ 1.58	7.44 $\pm$ 1.51	15.99 $\pm$ 1.54	790.52 $\pm$ 70.89	55.95 $\pm$ 6.11	27.73 $\pm$ 5.44
13	0.465	0.485	0.507	0.475	0.006	0.020	532	11.41 $\pm$ 1.68	14.53 $\pm$ 1.78	6.92 $\pm$ 1.76	19.73 $\pm$ 1.75	1065.72 $\pm$ 178.66	51.86 $\pm$ 5.33	20.52 $\pm$ 5.12
14	0.486	0.507	0.529	0.497	0.006	0.021	600	9.20 $\pm$ 1.64	15.07 $\pm$ 1.75	8.12 $\pm$ 1.70	19.44 $\pm$ 1.72	1147.27 $\pm$ 165.82	58.60 $\pm$ 5.43	24.68 $\pm$ 5.03
15	0.508	0.529	0.550	0.519	0.006	0.021	645	10.87 $\pm$ 1.55	15.26 $\pm$ 1.68	7.40 $\pm$ 1.67	20.15 $\pm$ 1.64	1129.49 $\pm$ 66.91	54.53 $\pm$ 4.89	21.55 $\pm$ 4.73
16	0.530	0.550	0.572	0.540	0.006	0.020	535	11.39 $\pm$ 1.82	19.45 $\pm$ 1.95	7.71 $\pm$ 1.90	23.82 $\pm$ 1.91	1256.73 $\pm$ 151.43	59.65 $\pm$ 4.70	18.88 $\pm$ 4.57
17	0.551	0.572	0.594	0.561	0.007	0.021	566	8.65 $\pm$ 1.84	18.50 $\pm$ 1.94	6.01 $\pm$ 1.94	21.29 $\pm$ 1.92	1352.91 $\pm$ 107.55	64.94 $\pm$ 5.21	16.39 $\pm$ 5.21
18	0.573	0.594	0.615	0.584	0.007	0.021	594	8.94 $\pm$ 2.09	20.93 $\pm$ 2.22	7.29 $\pm$ 2.23	23.90 $\pm$ 2.20	1862.11 $\pm$ 199.62	66.88 $\pm$ 5.31	17.77 $\pm$ 5.33
19	0.595	0.615	0.637	0.605	0.006	0.020	485	10.35 $\pm$ 2.29	23.17 $\pm$ 2.41	7.63 $\pm$ 2.35	26.50 $\pm$ 2.39	1762.65 $\pm$ 117.67	65.93 $\pm$ 5.21	16.74 $\pm$ 5.09
20	0.616	0.637	0.659	0.626	0.006	0.021	528	12.89 $\pm$ 2.19	25.40 $\pm$ 2.26	8.28 $\pm$ 2.28	29.67 $\pm$ 2.25	1757.98 $\pm$ 124.30	63.09 $\pm$ 4.43	16.20 $\pm$ 4.41
21	0.638	0.659	0.680	0.648	0.006	0.021	481	8.16 $\pm$ 2.31	24.92 $\pm$ 2.43	6.73 $\pm$ 2.45	27.08 $\pm$ 2.42	1828.99 $\pm$ 98.22	71.88 $\pm$ 5.08	14.40 $\pm$ 5.19
22	0.660	0.680	0.705	0.669	0.006	0.020	442	10.05 $\pm$ 2.62	26.98 $\pm$ 2.71	9.90 $\pm$ 2.75	30.45 $\pm$ 2.71	2123.80 $\pm$ 290.92	69.57 $\pm$ 5.24	18.98 $\pm$ 5.17
23	0.681	0.705	0.734	0.693	0.007	0.024	370	9.40 $\pm$ 2.72	27.36 $\pm$ 2.82	7.23 $\pm$ 2.75	29.81 $\pm$ 2.81	1867.51 $\pm$ 122.03	71.05 $\pm$ 5.41	14.02 $\pm$ 5.30
24	0.706	0.734	0.770	0.720	0.009	0.028	366	9.93 $\pm$ 2.51	22.89 $\pm$ 2.63	4.85 $\pm$ 2.67	25.42 $\pm$ 2.61	1645.10 $\pm$ 101.74	66.55 $\pm$ 5.82	11.00 $\pm$ 6.02
25	0.735	0.770	0.817	0.753	0.011	0.035	350	12.52 $\pm$ 2.90	27.64 $\pm$ 3.06	6.57 $\pm$ 3.07	31.05 $\pm$ 3.04	2095.02 $\pm$ 167.60	65.63 $\pm$ 5.53	12.21 $\pm$ 5.66
26	0.771	0.817	0.877	0.794	0.014	0.046	351	16.27 $\pm$ 3.13	29.85 $\pm$ 3.40	12.13 $\pm$ 3.35	36.10 $\pm$ 3.34	2514.55 $\pm$ 187.11	61.41 $\pm$ 5.38	19.64 $\pm$ 5.32
27	0.818	0.877	0.954	0.848	0.017	0.059	350	9.81 $\pm$ 2.92	30.60 $\pm$ 3.11	9.48 $\pm$ 3.09	33.50 $\pm$ 3.09	2132.04 $\pm$ 169.38	72.23 $\pm$ 5.24	16.44 $\pm$ 5.28
28	0.878	0.954	1.050	0.915	0.022	0.076	354	17.32 $\pm$ 2.82	28.63 $\pm$ 2.88	8.97 $\pm$ 2.92	34.64 $\pm$ 2.86	1933.98 $\pm$ 126.91	58.83 $\pm$ 4.85	15.01 $\pm$ 4.82
29	0.955	1.050	1.188	1.001	0.029	0.095	350	11.36 $\pm$ 2.93	27.58 $\pm$ 2.96	9.06 $\pm$ 3.04	31.17 $\pm$ 2.96	2057.18 $\pm$ 157.04	67.61 $\pm$ 5.63	16.89 $\pm$ 5.57
30	1.051	1.188	1.370	1.118	0.040	0.137	352	19.15 $\pm$ 2.83	25.69 $\pm$ 2.87	5.40 $\pm$ 3.05	32.50 $\pm$ 2.86	1985.59 $\pm$ 151.93	53.30 $\pm$ 5.09	9.57 $\pm$ 5.37
31	1.189	1.370	1.746	1.282	0.055	0.181	356	9.33 $\pm$ 2.77	27.92 $\pm$ 2.69	7.47 $\pm$ 2.91	30.37 $\pm$ 2.71	1837.27 $\pm$ 141.04	71.53 $\pm$ 5.38	14.23 $\pm$ 5.46
32	1.371	1.746	2.143	1.475	0.067	0.143	461	12.12 $\pm$ 2.75	26.93 $\pm$ 2.73	7.51 $\pm$ 2.95	30.47 $\pm$ 2.75	2411.51 $\pm$ 280.14	65.77 $\pm$ 5.34	14.26 $\pm$ 5.53

**Tabel 5.2:** Dispersi  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ , momen campuran  $\sigma'_{xy}$ ,  $\sigma'_{xz}$ ,  $\sigma'_{yz}$ , dan kecepatan rata-rata dalam arah rotasi  $\langle v_\phi \rangle$  untuk setiap *bin* (Nomor 1 hingga 10) dan seluruh bintang yang telah melewati Diskontinuitas Parenago (baris terbawah). Diberikan juga parameter statistik setiap *bin* yaitu nilai maksimal dan minimal, titik tengah, deviasi standar, lebar *bin*, dan jumlah data di dalam *bin*

<i>bin</i>	$(B - V)$		titik tengah	deviasi standar	lebar <i>bin</i>	jumlah data	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma'_{xy}$	$\sigma'_{xz}$	$\sigma'_{yz}$	$\langle v_\phi \rangle$
	min	max					km sec <sup>-1</sup>	km sec <sup>-1</sup>	km sec <sup>-1</sup>	km sec <sup>-1</sup>	km sec <sup>-1</sup>	km sec <sup>-1</sup>	km sec <sup>-1</sup>
1	-0.224	0.196	0.057	0.094	0.420	1366	14.03±0.33	11.17±0.32	7.20±0.32	7.19±0.42	-1.69±1.43	1.92±1.29	3.11±0.62
2	0.197	0.365	0.289	0.049	0.168	1364	19.05±0.51	17.13±2.87	10.11±0.94	8.08±1.87	2.02±3.59	-3.64±5.49	1.40±0.64
3	0.366	0.446	0.412	0.023	0.080	1393	23.19±1.38	18.06±2.01	12.82±0.54	4.58±6.96	1.30±7.42	2.30±4.62	-0.40±0.68
4	0.447	0.500	0.474	0.016	0.053	1389	29.20±1.53	20.43±1.81	16.03±1.43	8.19±2.87	-7.25±3.39	-4.95±5.53	-3.64±0.77
5	0.501	0.550	0.525	0.014	0.049	1365	29.80±0.85	22.51±1.50	17.74±0.86	2.23±10.73	1.08±14.84	9.22±2.04	-4.00±0.78
6	0.551	0.603	0.577	0.015	0.052	1370	34.95±1.25	25.93±1.50	22.64±1.13	5.29±6.87	-4.24±6.52	2.79±9.50	-7.44±0.90
7	0.604	0.663	0.633	0.017	0.059	1381	37.47±1.48	26.90±1.27	25.17±0.91	12.37±3.11	3.29±7.58	-1.56±13.44	-9.32±0.98
8	0.664	0.763	0.706	0.029	0.099	1363	37.31±0.82	27.72±0.81	23.73±0.85	7.41±2.66	1.09±17.51	5.04±3.49	-9.19±0.96
9	0.764	1.020	0.872	0.073	0.256	1371	40.87±0.98	30.27±1.01	25.21±0.97	11.04±2.38	2.49±9.65	-0.98±22.89	-12.06±1.08
10	1.021	1.746	1.287	0.169	0.725	1271	39.91±1.05	29.83±1.58	25.52±1.60	7.56±4.74	3.10±10.36	-8.53±4.64	-11.26±1.05
—	0.610	1.746	0.874	0.266	1.136	5250	39.07±0.56	28.78±0.62	24.94±0.57	9.72±1.62	2.91±4.40	-2.49±5.41	-10.58±1.02

**Tabel 5.3:**  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  masing-masing adalah akar nilai eigen terbesar, menengah, dan terkecil dari tensor dispersi kecepatan  $\sigma^2$  untuk setiap *bin* (Nomor 1 hingga 10) dan seluruh bintang yang telah melewati Diskontinuitas Parenago (baris terbawah).  $l_v$  adalah deviasi verteks. Satuan adalah  $\text{km sec}^{-1}$  untuk  $\sigma_i$  dan derajat untuk  $l_v$ . Parameter statistik setiap *bin* dapat dilihat pada Tabel 5.2.

<i>bin</i>	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1/\sigma_2$	$\sigma_1/\sigma_3$	$l_v$
1	14.96±0.33	9.91±0.32	7.17±0.32	1.51±0.06	2.09±0.10	27.59±1.06
2	20.05±0.51	15.99±2.87	10.05±0.94	1.25±0.23	2.00±0.19	31.04±5.13
3	23.23±1.38	18.00±2.01	12.82±0.54	1.29±0.16	1.81±0.13	5.61±7.98
4	29.46±1.53	20.22±1.81	15.82±1.43	1.46±0.15	1.86±0.19	8.57±3.10
5	29.80±0.85	23.22±1.50	16.81±0.86	1.28±0.09	1.77±0.10	0.75±1.04
6	34.98±1.25	25.91±1.50	22.62±1.13	1.35±0.09	1.55±0.09	2.91±3.73
7	37.91±1.48	26.29±1.27	25.16±0.91	1.44±0.09	1.51±0.08	12.11±6.54
8	37.37±0.82	27.69±0.81	23.67±0.85	1.35±0.05	1.58±0.07	5.00±2.61
9	41.10±0.98	29.95±1.01	25.21±0.97	1.37±0.06	1.63±0.07	8.95±3.83
10	39.96±1.05	30.10±1.58	25.10±1.60	1.33±0.08	1.59±0.11	4.62±3.52
—	39.23±0.56	28.56±0.62	24.93±0.57	1.37±0.04	1.57±0.04	7.56±2.18



**Gambar 5.4:** Pemetaan deviasi verteks  $l_v$  terhadap Indeks Warna ( $B - V$ )

## Bab 6

### Diskusi

Sejumlah 13 633 sampel bintang-bintang deret utama yang tak bias kinematik, dengan pengukuran paralaks oleh satelit *Hipparcos* memiliki galat relatif kurang dari 10 persen, telah digunakan untuk menentukan dan menganalisis kinematika bintang-bintang lokal matahari. Karena kecilnya galat sistematis dan galat acak data *Hipparcos*, maka galat didominasi oleh derau Poisson akibat pemenggalan sampel ke dalam *bin* dengan jumlah data yang terbatas. Dengan hanya menggunakan Katalog *Hipparcos* sebagai sumber data dan tidak mengikutkan data dari katalog lain, sampel yang diperoleh juga terjamin homogenitasnya.

Persamaan 5.1 adalah kecepatan gerak Matahari relatif terhadap Standar Diam Lokal (LSR). Konsisten dengan studi-studi sebelum (*e.g.* Mayor (1974), Oblak (1983), Binenaymé dan Séchaud (1997)) maupun sesudah keluarnya data *Hipparcos* (*e.g.* Dehnen dan Binney (1998), Hogg *et al.* (2005)), hasil ini memiliki komponen  $\hat{y}$  ( $V_0 = 5.14 \pm 0.61 \text{ km s}^{-1}$ ) yang lebih kecil dari nilai klasik yang diperoleh Delhaye [9] yaitu  $12 \text{ km s}^{-1}$ . Salah satu faktor yang menyebabkan perbedaan yang besar ini adalah karena bintang yang lebih biru dari  $(B - V) \approx 0$  memiliki nilai  $\langle v_x \rangle$  dan  $\langle v_y \rangle$  yang tidak mengikuti tren secara umum. Hal ini diduga karena bintang-bintang ini masih muda sehingga masih bergerak dengan kecepatan awan gas tempat mereka dilahirkan dan belum sepenuhnya mengikuti gerak rotasi Galaksi. Oleh karena itu bintang-bintang muda ini tidak diikuti dalam perhitungan  $\mathbf{v}_0$ , sementara bila kita mengikutkan bintang-bintang tersebut akan diperoleh  $V_0$  yang secara signifikan lebih tinggi yaitu  $V_0 = 7.14 \pm 0.52 \text{ km s}^{-1}$ .



Persamaan 5.2 mengkuantifikasi aliran asimetris dan Gambar 5.3 memetakan kecepatan rata-rata rotasi sebagai fungsi dari  $(B - V)$ . Sebagaimana nampak dalam Gambar, semakin tua usia bintang, kecepatan rotasinya akan semakin tertinggal dari kecepatan rotasi LSR mengelilingi pusat Galaksi.

Bentuk elipsoid kecepatan tidak banyak berubah relatif terhadap  $(B - V)$ . Dalam rentang kesalahan setiap *bin*, rasio antara sumbu bernilai konstan pada  $\sigma_1/\sigma_2 \approx 1.35$  dan  $\sigma_1/\sigma_3 \approx 1.70$ . Rasio  $\sigma_3/\sigma_1$  dalam pekerjaan ini adalah  $\sigma_3/\sigma_1 \approx 0.6$ , lebih tinggi dari nilai yang diperoleh Wielen (1977) namun masih lebih rendah dari batas untuk proses pemanasan yang didominasi oleh awan molekul.  $\sigma_3/\sigma_1 \approx 0.6$  mengimplikasikan peran yang lebih besar pada hamburan oleh awan molekul dibandingkan hamburan oleh struktur spiral Galaksi dalam memanaskan piringan Galaksi. Pada Tabel 5.3 terlihat ada tren menurunnya  $\sigma_1/\sigma_3$  ke arah warna merah, sebuah tren yang diharapkan pada populasi bintang-bintang yang secara dinamis lebih panas: hamburan oleh awan molekul raksasa bekerja lebih efisien daripada struktur spiral [8].

Deviasi verteks  $l_v$  menurun dari nilai besar ( $l_v \gtrsim 25^\circ$ ) pada bintang-bintang tipe awal hingga mendekati nol pada diskontinuitas Parenago,  $(B - V) \approx 0.61$ , dan selanjutnya mulai konstan pada  $l_v \simeq 7.6^\circ$ . Deviasi verteks terbesar selalu dikaitkan dengan bintang-bintang termuda, karena fenomena ini dihasilkan oleh adanya dinamika lokal dari materi antar bintang pada saat pembentukan bintang, dan kemungkinan merupakan perwujudan dari adanya medan kecepatan gas dalam lengan spiral di dekat matahari. Kemungkinan lain adalah ini merupakan distribusi awal spasial dari bintang-bintang baru di daerah lokal [21, hal. 425]. Dua faktor lain yang berkontribusi pada deviasi verteks adalah 1) sebagian besar dari bintang-bintang muda merupakan anggota dari *moving groups* yaitu sekelompok bintang yang lahir pada waktu dan di tempat yang sama, lalu menyebar melalui aliran gerak bintang yang kebetulan berpotongan dengan aliran daerah lokal. 2) Deviasi verteks juga dapat disebabkan oleh adanya komponen potensial skala besar Galaksi yang nonaksisimetrik, misalnya oleh batang ataupun lengan spiral Galaksi. Lengan spiral—sebagaimana telah kita bahas dalam Subbab 2.4.3—akan berkontribusi pada deviasi verteks dari seluruh kelompok bintang, namun yang paling dipengaruhi adalah populasi dengan dispersi terkecil yaitu bintang-bintang termuda. Hal ini disebabkan karena bintang dengan amplitudo episiklus yang sebanding atau lebih besar dari jarak antar

lengan tidak akan banyak dipengaruhi oleh potensial Galaksi. Dengan demikian, semakin rapat gelungan lengan spiral Galaksi, pengaruh efek ini semakin dibatasi pada bintang-bintang tipe awal. Namun pada kenyataannya kita juga melihat bahwa deviasi verteks juga terjadi pada bintang-bintang tipe akhir dan penyebabnya dapat disebabkan oleh adanya batang Galaksi atau oleh lengan spiral Galaksi yang renggang. Untuk mengkuantifikasi hal ini, dari Persamaan 2.49 kita misalkan  $X$  adalah amplitudo episiklus dari sebuah bintang tipe akhir. Radius orbit bintang adalah  $R(t) = R_g + X \cos(\kappa t + \psi)$ , di mana frekuensi episiklus  $\kappa = 2\sqrt{B^2 - AB} \simeq 36.7 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  dan  $R_g$  adalah jarak menuju episenter. Kita dapat mendekati  $\dot{R}^2$  dengan  $\sigma_1^2 \simeq (39 \text{ km s}^{-1})^2$ , sehingga  $X \simeq \sqrt{2}\sigma_1/\kappa \simeq 1.5 \text{ kpc}$ . Dengan demikian bintang bergerak sejauh  $\sim 3 \text{ kpc}$  setiap satu periode episiklus. Bila jarak antar lengan  $\Delta \lesssim 3 \text{ kpc}$ , maka potensial Galaksi tidak akan memberikan banyak pengaruh pada orbit bintang tipe akhir. Dengan demikian sangat penting untuk menentukan amplitudo rata-rata ini dengan lebih teliti untuk menelaah lebih lanjut penyebab dari deviasi verteks pada bintang-bintang akhir.

Sebagai penutup perlu diingat bahwa dalam kesimpulan-kesimpulan dari studi distribusi bintang dalam ruang kecepatan tidak mengimplikasikan tunduknya distribusi tersebut pada fungsi distribusi elipsoid kecepatan. Elipsoid kecepatan Schwarzschild adalah sebuah model formal yang tidak harus ada secara fisik [8]. Studi-studi terbaru menunjukkan bahwa elipsoid kecepatan adalah pendekatan untuk distribusi kecepatan dalam skala besar, sementara pada skala kecil terdapat substruktur yang nampak jelas terlihat pada bintang-bintang termuda namun juga ditemukan pada bintang dalam segala usia. Diskusi mengenai substruktur dalam distribusi kecepatan dimulai semenjak model “dua aliran” Kapteyn [18], dan selama empat dekade Olin J. Eggen telah mengusung ide substruktur dalam bentuk “*moving groups*” [10, dan referensi-referensi di dalamnya]. Keberadaan dan keanggotaan *moving groups* selama ini menjadi kontroversi namun dengan diluncurkannya satelit *Hipparcos*, keberadaan substruktur yang sebelumnya telah diidentifikasi oleh Eggen dapat diverifikasi (*e.g.* Dehnen 1998, Skuljan *et al.* 1999). Data *Hipparcos* dapat digunakan untuk menentukan distribusi skala kecil seperti ini [26, 7, 13], namun topik itu akan dibahas dalam kesempatan yang lain.

# Daftar Pustaka

- [1] Anton, H., Rorres, C., 1994, *Elementary Linear Algebra, Applications Version, 7th Ed.*, John Wiley & Sons, New York.
- [2] Barbanis, B., Woltjer, L., 1967, *Orbits in Spiral Galaxies and the Velocity Dispersion of Population I Stars*, **ApJ** **150**: 461–468.
- [3] Bevington, P.R, Robinson, K.D., 1992, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, 2nd Ed.*, McGraw-Hill, Boston.
- [4] Bienaymé, O., Séchaud, N., 1997, *Stellar kinematics in the solar neighbourhood and the disc scale lengths of the Galaxy*, **Astron.Astrophys.** **323**: 781–788.
- [5] Binney, J.J., Dehnen, W., Houk, N., Murray, C.A., Penston, M.J., 1997, *The Kinematics of Main-Sequence Stars from Hipparcos Data*, dalam Battrick, B., editor, *The Hipparcos Venice '97 (ESA SP-402)*, hal. 473–477, ESA, Noordwick.
- [6] Binney, J.J., Tremaine, S., 1987, *Galactic Dynamics*, Princeton Univ. Press, Princeton.
- [7] Dehnen, W., 1998, *The Distribution of Nearby Stars in Velocity Space Inferred from Hipparcos Data*, **AJ** **115**: 2384–2396.
- [8] Dehnen, W., Binney, J.J., 1998, *Local stellar kinematics from Hipparcos data*, **MNRAS** **298**: 387–394.
- [9] Delhaye, J., 1965, *Solar Motion and Velocity Distribution of Common Stars*, dalam Blaauw, A., Schmidt, M., editor, *Stars and Stellar Systems, Vol. 5: Galactic Structure*, hal. 61–110, University of Chicago Press, Chicago.

- 
- [10] Eggen, O.J., 1996, *Star Streams and Galactic Structure*, **AJ** **112**: 1595.
- [11] ESA, 1997, *The Hipparcos and Tycho Catalogue*, ESA SP-1200.
- [12] Feast, M., Whitelock, P., 1997, *Galactic Kinematics of Cepheids from Hipparcos Proper Motions*, **MNRAS** **291**: 683–693.
- [13] Hogg, D.W., Blanton, M.R., Roweis, S.T., Johnston, K.V., 2005, *Modeling complete distributions with incomplete observations: The velocity ellipsoid from Hipparcos data*, **ApJ** **629**: 268–275.
- [14] Houk, N., 1978, *Catalogue of Two-Dimensional Spectral Types for the HD Stars, Vol.2*, Dept. of Astronomy, Univ. of Michigan, Ann Arbor.
- [15] Houk, N., 1982, *Catalogue of Two-Dimensional Spectral Types for the HD Stars, Vol.3*, Dept. of Astronomy, Univ. of Michigan, Ann Arbor.
- [16] Houk, N., Cowley, A.P., 1975, *Catalogue of Two-Dimensional Spectral Types for the HD Stars, Vol.1*, Dept. of Astronomy, Univ. of Michigan, Ann Arbor.
- [17] Jenkins, A., 1992, *Heating of Galactic Discs with Realistic Vertical Potentials*, **MNRAS** **257**: 620–632.
- [18] Kapteyn, J.C., 1912, *On the Derivation of the Constants for the Two Star Streams*, **MNRAS** **72**: 743–752.
- [19] Lacey, C.G., 1984, *The Influence of Massive Gas Clouds on Stellar Velocity Dispersions in Galactic Discs*, **MNRAS** **208**: 687–707.
- [20] Mayor, M., 1974, *Kinematics and Age of Stars*, **Astron.Astrophys.** **32**: 321–327.
- [21] Mihalas, D., Binney, J.J., 1981, *Galactic Astronomy: Structure and Kinematics, 2nd Ed.*, W.H. Freeman, San Francisco.
- [22] Oblak, E., 1983, *The gradients of the velocity ellipsoid for nearby stars*, **Astron.Astrophys.** **123**: 238–248.

- 
- [23] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., 1989, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (FORTRAN Version)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [24] Roman, N.G., 1950, *A Correlation Between the Spectroscopic and Dynamical Characteristic of the Late F- And Early G-Type Stars*, **ApJ** **112**: 554–559.
- [25] Roman, N.G., 1952, *The Spectra of the Bright Stars of Types F5-K5*, **ApJ** **116**: 122–143.
- [26] Skuljan, J., Hearnshaw, J.B., Cottrell, P.L., 1999, *Velocity Distribution of Stars in the Solar Neighbourhood*, **MNRAS** **308**: 731–740.
- [27] Spitzer, Jr., L., Schwarzschild, M., 1953, *The Possible Influence of Interstellar Clouds on Stellar Velocities. II*, **ApJ** **118**: 106–112.
- [28] Trumpler, R.J., Weaver, H.F., 1953, *Statistical Astronomy*, Dover Publications, Inc., New York.
- [29] Wielen, R., 1977, *The Diffusion of Stellar Orbits Derived from the Observed Age-Dependence of the Velocity Dispersion*, **Astron.Astrophys.** **60**: 263–275.



# Lampiran A

## Transformasi Koordinat

Misalkan bintang  $S$  memiliki Koordinat Ekuatorial  $(\alpha, \delta)$  dan Koordinat Galaktik  $(l, b)$ . Diketahui pula bahwa koordinat dari Kutub Utara Galaksi (titik NGP) adalah  $(\alpha_{\text{NGP}}, \delta_{\text{NGP}})$ . Situasi ini diberikan pada Gambar A.1 di sebelah kiri. Tarik garis yang melewati bintang dari Kutub Utara Langit menuju Kutub Selatan Langit, dan buat garis serupa yang melewati bintang namun dari Kutub Utara Galaksi menuju Kutub Selatan Galaksi. Dengan cara ini terbentuk segitiga bola  $\text{NGP} - \hat{\text{NCP}} - S$  (Gambar A.1, kanan). Sudut  $x$ , melalui gambar tersebut kita ketahui sebagai  $x = 90 + (33 - l) = (303 - l) - 180$ .

Dari Rumus Kosinus Segitiga Bola ABC

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \quad (\text{A.1})$$

diperoleh dua persamaan:

$$\sin b = \sin \delta_{\text{NGP}} \sin \delta + \cos \delta_{\text{NGP}} \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_{\text{NGP}}), \quad (\text{A.2})$$

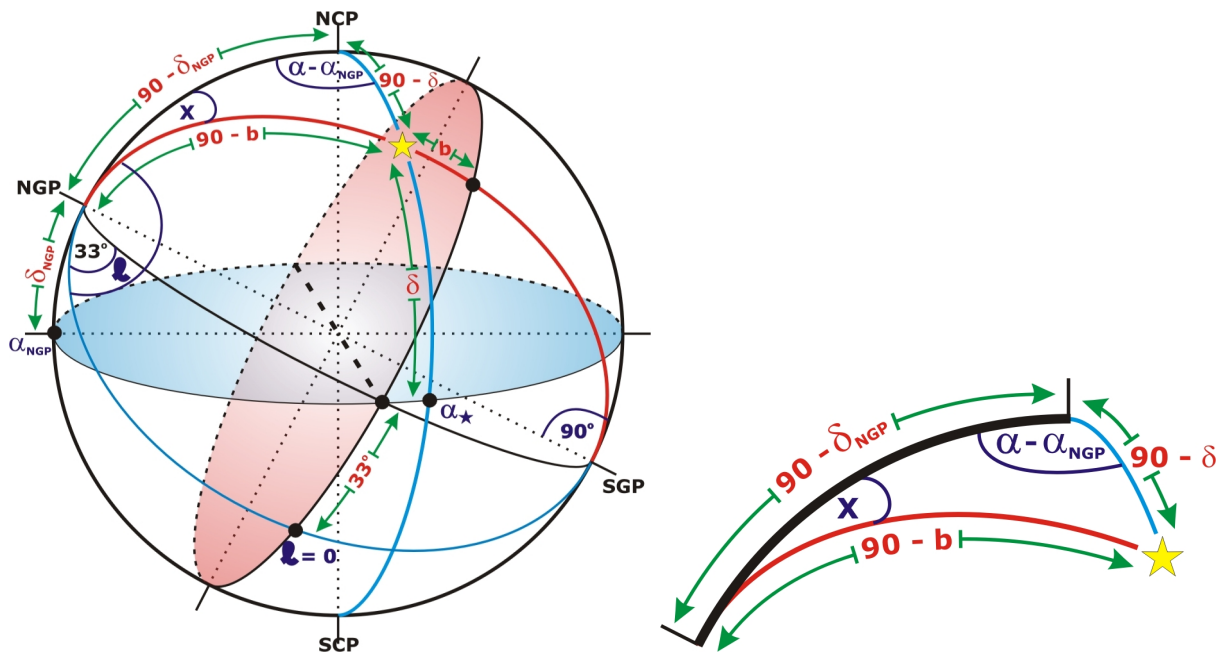
$$\sin \delta = \sin \delta_{\text{NGP}} \sin b - \cos \delta_{\text{NGP}} \cos b \cos(303^\circ - l), \quad (\text{A.3})$$

sementara dari Rumus Sinus Segitiga Bola ABC

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (\text{A.4})$$

diperoleh sebuah persamaan:

$$\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_{\text{NGP}}) = -\cos b \sin(303^\circ - l). \quad (\text{A.5})$$



**Gambar A.1: Kiri:** Posisi sebuah bintang dalam Koordinat Galaktik dan Koordinat Ekuatorial. **Kanan:** Detail segitiga bola NGP – NCP – S

Gabungkan ketiga persamaan di atas. Substitusikan  $\sin b$  dan  $\cos b$  dalam A.3 oleh A.2 dan A.5 sehingga diperoleh

$$\tan(303^\circ - l) = \frac{\sin(\alpha_{\text{NGP}} - \alpha)}{\cos(\alpha_{\text{NGP}} - \alpha) \sin \delta_{\text{NGP}} - \tan \delta \cos \delta_{\text{NGP}}}. \quad (\text{A.6})$$

Persamaan A.6 dan A.2 adalah dua set persamaan yang menyatakan Koordinat  $(l, b)$  Bintang S sebagai fungsi dari Koordinat  $(\alpha, \delta)$ :

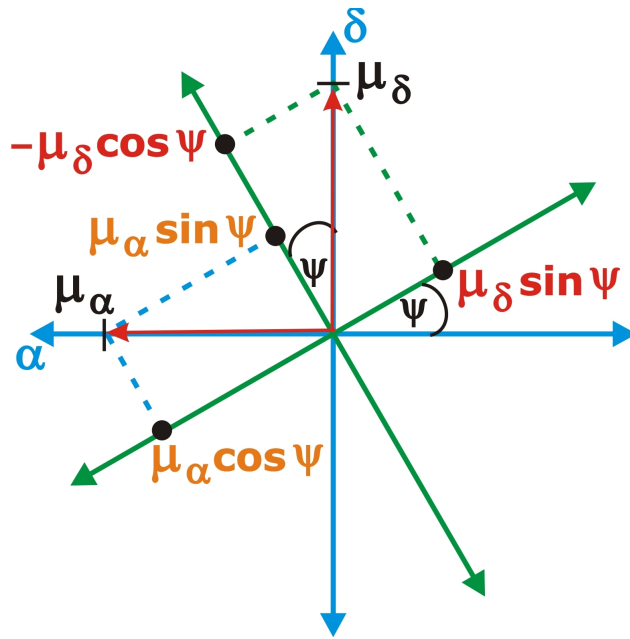
$$\tan(303^\circ - l) = \frac{\sin(\alpha_{\text{NGP}} - \alpha)}{\cos(\alpha_{\text{NGP}} - \alpha) \sin \delta_{\text{NGP}} - \tan \delta \cos \delta_{\text{NGP}}} \quad (\text{A.7})$$

$$\sin b = \sin \delta_{\text{NGP}} \sin \delta + \cos \delta_{\text{NGP}} \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_{\text{NGP}}) \quad (\text{A.8})$$

Kedua persamaan ini yang selanjutnya digunakan dalam *code* Fortran. Untuk semua kasus, diambil koordinat Kutub Utara Galaktik  $\alpha_{\text{NGP}} = 12^{\text{h}}51^{\text{m}}24^{\text{s}}$  dan  $\delta_{\text{NGP}} = +27^\circ 07'$ , keduanya untuk J2000.00

Untuk transformasi gerak diri, sistem Koordinat Ekuatorial dan Sistem Koordinat Galaktik memiliki titik asal yang sama. Kedua sumbu koordinat tersebut memiliki kemiringan sebesar  $\psi$ . Sudut  $\psi$  disebut juga sudut paralaktik dan merupakan sudut antara kutub utara galaksi, posisi bintang, dan kutub utara langit. Transformasi  $(\mu_{\alpha^*}, \mu_{\delta})$





**Gambar A.2:** Transformasi komponen gerak diri  $(\mu_{\alpha^*}, \mu_{\delta^*})$  menjadi  $(\mu_{l^*}, \mu_{b^*})$  dilakukan dengan menjumlahkan proyeksi  $(\mu_{\alpha^*}, \mu_{\delta^*})$  pada sumbu  $l$  dan  $b$

ke  $(\mu_l, \mu_b)$  dilakukan dengan cara memproyeksikan komponen gerak diri  $(\mu_{\alpha^*}, \mu_{\delta^*})$  pada sumbu  $l$  dan sumbu  $b$  sehingga diperoleh hubungan komponen  $(\mu_{l^*}, \mu_{b^*})$  dengan  $(\mu_{\alpha^*}, \mu_{\delta^*})$  (Gambar A.2) yaitu

$$\mu_{l^*} = \mu_{\alpha^*} \cos \delta \cos \psi + \mu_{\delta^*} \sin \psi \qquad \mu_{b^*} = -\mu_{\alpha^*} \cos \delta \sin \psi + \mu_{\delta^*} \cos \psi, \qquad (\text{A.9})$$

dengan sudut paralaktik  $\psi$  adalah

$$\cos b \cos \psi = \sin \delta_{\text{NGP}} \cos \delta - \cos \delta_{\text{NGP}} \sin \delta \cos(\alpha - \alpha_{\text{NGP}})$$

$$\cos b \sin \psi = \sin(\alpha - \alpha_{\text{NGP}}) \cos \delta_{\text{NGP}}$$

## Lampiran B

# Transformasi Vektor Kecepatan Bintang

Pada Gambar B.1, misalkan sebuah bintang berjarak  $d$  memiliki koordinat Galaktik  $(l, b)$ . Anggap pula  $(x, y, z)$  adalah koordinat kartesius posisi bintang relatif terhadap matahari. Sumbu  $x$  positif berimpit dengan arah  $l = 0^\circ$  dan  $b = 0^\circ$  (arah pusat Galaksi), sumbu  $y$  positif dengan  $l = 90^\circ$  dan  $b = 0^\circ$  (arah rotasi Galaksi), dan sumbu  $z$  dengan  $b = 90^\circ$  (arah Kutub Utara Galaksi). Vektor kecepatan bintang dalam koordinat kartesius dinotasikan dengan  $\mathbf{v} = (U, V, W)$ , sementara vektor dalam koordinat bola adalah  $\mathbf{v}_s = (v_R, v_l, v_b)$  di mana masing-masing adalah gerak dalam arah radial, arah bujur galaktik  $l$ , dan arah lintang galaktik  $b$ . Transformasi vektor  $\mathbf{v}_s$  menjadi  $\mathbf{v}$  adalah penjumlahan dari proyeksi  $\mathbf{v}_s$  pada sumbu kartesius:

$$U = v_R \cos b \cos l - v_l \sin l - v_b \sin b \cos l,$$

$$V = v_R \cos b \sin l + v_l \cos l - v_b \sin b \sin l, \quad (\text{B.1})$$

$$W = v_R \sin b + v_b \cos b.$$

Apabila dinyatakan dalam bentuk matriks, Persamaan B.1 menjadi

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos l \cos b & -\sin l & -\cos l \sin b \\ \sin l \cos b & \cos l & -\sin l \sin b \\ \sin b & 0 & \cos b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ v_l \\ v_b \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

atau

$$\mathbf{v} = \gamma \cdot \mathbf{v}_s, \quad (\text{B.3})$$



## Lampiran C

# Persamaan Boltzmann Tanpa Tumbukan dan Persamaan Jeans

Orbit sebuah bintang bergerak dalam ruang fase 6 dimensi posisi dan kecepatan. Kita mendefinisikan sebuah fungsi distribusi  $f$  sebagai rapat bintang pada suatu titik dalam ruang fase 6 dimensi. Jika sebuah benda memiliki vektor posisi  $\mathbf{r}$  dan vektor kecepatan  $\mathbf{v}$ , maka  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}$  menyatakan jumlah bintang pada waktu  $t$  dalam elemen volume enam dimensi yang dibatasi oleh  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ , dan  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Dari definisi ini maka rapat bintang  $\nu$  di suatu titik spasial  $\mathbf{r}$  pada saat  $t$  adalah integral kecepatan dari fungsi distribusi:

$$\nu(\mathbf{r}, t) \equiv \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{v}, \quad (\text{C.1})$$

di mana rentang integrasi adalah seluruh kecepatan. Jika massa rata-rata tiap bintang adalah  $m$ , maka rapat massa bintang pada titik ini adalah  $\rho(\mathbf{r}, t) = m\nu(\mathbf{r}, t)$ . Potensial gravitasi sistem dengan demikian adalah

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (\text{C.2})$$

Hubungan ini menyerupai Persamaan Poisson

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho. \quad (\text{C.3})$$

Untuk penyederhanaan, dalam perhitungan kita akan menganggap tidak ada tumbukan antar bintang (dalam kenyataan sebenarnya, tumbukan antar bintang adalah peristiwa yang langka karena radius bintang selalu jauh lebih kecil dari jarak antar bintang)

dan semua bintang akan memiliki massa yang sama yaitu  $m$ . Jika komponen vektor posisi  $\mathbf{r}$  dan vektor kecepatan  $\mathbf{v}$  dinotasikan masing-masing oleh  $x_i$  dan  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), maka persamaan kanonik dari gerak sebuah bintang dapat dinyatakan dengan

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad \dot{u}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (\text{C.4})$$

dengan Fungsi Hamilton

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 u_i^2 + V(x_i, t). \quad (\text{C.5})$$

Bila keadaan tunak berlaku maka jumlah bintang dalam elemen volume ruang enam dimensi tersebut akan selalu tetap. Dengan kata lain, jumlah bintang yang memasuki elemen volume akan sama dengan jumlah bintang yang meninggalkan elemen volume tersebut. Konsekuensinya bintang tidak muncul, menghilang, atau meloncat dari satu titik dalam ruang fase ke titik lain dan fungsi distribusi akan mengikuti persamaan kontinuitas

$$\nabla \cdot (f\dot{\mathbf{w}}) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (\text{C.6})$$

di mana vektor  $\mathbf{w}$  adalah ruang fase 6 dimensi yang merupakan generalisasi dari vektor  $\mathbf{r}$  dan  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{w} \equiv (x_i, u_i). \quad (\text{C.7})$$

Persamaan C.6 dapat ditulis lebih lengkap dengan

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + f \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} \right] + \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial f}{\partial u_i} \dot{u}_i + f \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial u_i} \right] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Dari persamaan kanonik gerak bintang akan diperoleh

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial H}{\partial u_i} \right) = -\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial u_i}, \quad (\text{C.9})$$

sehingga C.8 menjadi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial u_i} \dot{u}_i \right] + \frac{\partial f}{\partial t} &= 0, \\ \mathbf{v} \cdot \nabla f + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial f}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Persamaan Boltzmann Tanpa Tumbukan dinyatakan oleh Persamaan C.10 jika kita menganggap sistem bintang hanya dipengaruhi oleh gaya konservatif, yaitu gaya yang

dapat diwakili oleh gradien dari fungsi potensial  $\Phi$  yang kontinu. Jika potensial ini tidak kontinu, maka tumbukan antar antar bintang dapat memindahkan bintang dari satu titik dalam ruang fase ke titik lain. Gradien potensial  $\nabla\Phi$  terkait oleh persamaan kanonik melalui

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\Phi, \quad (\text{C.11})$$

sehingga C.10 menjadi

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Karena fungsi distribusi  $f$  adalah fungsi distribusi dengan tujuh variabel, maka solusi lengkap untuk Persamaan Boltzmann pada umumnya sangat sulit. Namun beberapa hal penting dapat diperoleh bila kita mengambil momen dari Persamaan Boltzmann. Jika kita mengintegrasikan C.12 pada seluruh kecepatan yang mungkin, kita akan memperoleh

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3\mathbf{v} + \int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0, \quad (\text{C.13})$$

dengan komponen berindeks sama berarti penjumlahan komponen-komponen tersebut. Karena rentang kecepatan yang kita integralkan tidak bergantung pada  $t$  maupun  $x_i$ , maka turunan parsial  $\partial/\partial t$  dan  $\partial/\partial x_i$  pada bagian pertama dan kedua dapat kita lakukan di luar tanda integral. Lebih lanjut, bagian ketiga bernilai nol karena

$$\int \frac{\partial f}{\partial v_i} dv_i = [f]_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad (\text{C.14})$$

integral ini bernilai nol karena tidak ada bintang yang bergerak dengan kecepatan tak hingga. Bila kita mendefinisikan momen pertama kecepatan dari  $f$  sebagai

$$\int f v_i d^3\mathbf{v} \equiv \nu \bar{v}_i, \quad (\text{C.15})$$

kita memperoleh

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \nabla \cdot \nu \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (\text{C.16})$$

Ini adalah persamaan kontinuitas yang menunjukkan bahwa jumlah bintang dalam ruang fasa selalu konstan. Jika sekarang kita mengalikan C.12 dengan  $v_j$  dan mengintegrasikan pada seluruh kecepatan, kita memperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_j d^3\mathbf{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0. \quad (\text{C.17})$$

Bagian terakhir dari ruas kiri dapat diubah dengan mengaplikasikan teorema divergensi dan fakta bahwa  $f$  bernilai nol untuk  $v$  besar:

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = - \int f \frac{\partial v_j}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = - \int \delta_{ij} f d^3 \mathbf{v} = -\delta_{ij} \nu, \quad (\text{C.18})$$

sehingga (dengan mengingat pula definisi momen kecepatan pada Persamaan C.15) Persamaan C.17 dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{C.19})$$

di mana

$$\bar{v}_i \bar{v}_j \equiv \frac{1}{\nu} \int v_i v_j f d^3 \mathbf{v}. \quad (\text{C.20})$$

Bila kita kurangkan C.19 dengan Persamaan C.16 dikalikan  $\bar{v}_j$  maka akan diperoleh

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad (\text{C.21})$$

karena

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial t} = \bar{v}_j \frac{\partial \nu}{\partial t} + \nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t}. \quad (\text{C.22})$$

Perlu diingat bahwa  $\overline{v_i v_j}$  diubah menjadi  $\bar{v}_i \bar{v}_j$  melalui hubungan

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \bar{v}_i \bar{v}_j - \bar{v}_i \bar{v}_j. \quad (\text{C.23})$$

Dengan mensubstitusikan ini ke dalam Persamaan C.21, kita akan memperoleh

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}. \quad (\text{C.24})$$

Ruas kiri dan bagian pertama dari ruas kanan Persamaan C.24 menyerupai persamaan fluida Euler, sementara bagian kedua dari ruas kanan Persamaan C.24 menyerupai gradien tekanan  $-\nabla p$ . Lebih tepatnya  $-\nu \sigma_{ij}^2$  adalah tensor yang mendeskripsikan tekanan anisotropik [6, hal. 196]. Tensor  $\sigma^2$  bersifat simetris dan memiliki enam komponen independen yang mendeskripsikan dispersi dalam ruang kecepatan. Komponen diagonalisasinya yaitu  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , dan  $\sigma_3$  merupakan panjang sumbu semimayor dari elipsoid kecepatan.

Persamaan Jeans dalam koordinat silinder dapat diperoleh dengan terlebih dahulu mentransformasi Persamaan Boltzmann Tanpa Tumbukan (Persamaan C.12 dideskripsikan dalam koordinat kartesius) ke dalam koordinat silinder, lalu mengalikannya dengan  $v_R$  dan mengintegrasikan pada seluruh kecepatan untuk memperoleh [6, hal. 197]:

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_R)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_R^2)}{\partial R} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_R \bar{v}_z)}{\partial z} + \nu \left( \frac{\bar{v}_R^2 - \bar{v}_\phi^2}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right). \quad (\text{C.25})$$

Untuk penyederhanaan, kita dapat mengasumsikan bahwa sistem yang ditinjau bersifat aksisimetrik sehingga setiap turunan terhadap  $\phi$  bernilai nol.



## Lampiran D

# Penurunan Derau Poisson pada $\langle \mathbf{v} \rangle$ , $S^2$ , dan $\langle \mathbf{s} \rangle$

Derau Poisson sebuah nilai rata-rata  $\mu = \langle x \rangle$  yang merupakan nilai menengah sejumlah  $N$  variabel  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dapat ditentukan melalui

$$\sigma_{Poisson}^2(\langle \mu \rangle) = N^{-1} \sigma^2(\mu), \quad (\text{D.1})$$

dengan varians dari  $\mu$  ditentukan oleh

$$\sigma^2(\mu) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle. \quad (\text{D.2})$$

Untuk  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , varians  $\sigma^2(\mathbf{v})$  adalah  $\langle (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle$ . Dengan mengingat  $\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}'$  dan  $\mathbf{p}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}'$ , maka

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle &= \langle (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}')^2 \rangle, \\ &= \langle \mathbf{A} \rangle^{-2} \langle |\mathbf{p}'|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Karena  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ , maka  $\langle \mathbf{A} \rangle^2 = \langle \mathbf{A} \rangle$ . Dengan demikian

$$\sigma^2(\langle \mathbf{v} \rangle) = N^{-1} \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} \langle |\mathbf{p}'|^2 \rangle. \quad (\text{D.4})$$

Dengan mengingat definisi  $S^2 = \langle |\mathbf{p}'|^2 \rangle$  maka

$$\sigma_{poisson}^2(\langle \mathbf{v} \rangle) = N^{-1} \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} S^2. \quad (\text{D.5})$$

Dalam kasus  $S^2$ , varians dari  $S^2$  adalah  $\sigma^2(S^2) = \langle (S^2 - \langle S^2 \rangle)^2 \rangle$ . Kali ini dapat dilakukan pendekatan

$$\langle (S^2 - \langle S^2 \rangle)^2 \rangle = \langle S^4 \rangle - \langle S^2 \rangle^2. \quad (\text{D.6})$$

Substitusi  $S^2$  dengan  $\langle |\mathbf{p}'|^2 \rangle$  akan menghasilkan

$$\sigma_{Poisson}^2(S^2) = N^{-1} \left( \langle |\mathbf{p}'|^4 \rangle - \langle |\mathbf{p}'|^2 \rangle^2 \right). \quad (\text{D.7})$$

Derau Poisson untuk  $\langle \mathbf{s} \rangle$  diturunkan dengan cara yang sama dengan Derau Poisson untuk  $\langle \mathbf{v} \rangle$ . Definisikan  $\mathbf{s}' = \mathbf{s} - \langle \mathbf{s} \rangle = \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{B} \cdot \langle \mathbf{s} \rangle)$  sehingga diperoleh

$$\sigma_{Poisson}^2(\langle \mathbf{s} \rangle) = N^{-1} \langle \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{B} \cdot \langle \mathbf{s} \rangle)^2 \rangle, \quad (\text{D.8})$$

karena—sama seperti  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ . Maka Derau Poisson  $\langle \mathbf{s} \rangle$  adalah

$$\sigma_{Poisson}^2(\langle \mathbf{s} \rangle) = N^{-1} \langle \mathbf{B} \rangle^{-1} \cdot \langle |\mathbf{u} - \mathbf{B} \cdot \langle \mathbf{s} \rangle|^2 \rangle. \quad (\text{D.9})$$

## Lampiran E

### Perambatan Kesalahan

Perambatan kesalahan adalah perhitungan kesalahan dari sebuah besaran  $x$  merupakan fungsi dari satu variabel atau lebih,  $u, v, \dots$ , yang masing-masing memiliki deviasi standar  $\sigma_u, \sigma_v, \dots$ :

$$x = f(u, v, \dots). \quad (\text{E.1})$$

Meskipun tidak selalu eksak, tetapi nilai yang paling mungkin dari  $x$  dapat diberikan oleh

$$\bar{x} = f(\bar{u}, \bar{v}, \dots). \quad (\text{E.2})$$

Dalam limit jumlah pengukuran yang tak berhingga, varians dari  $x$  diberikan oleh

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right], \quad (\text{E.3})$$

dan deviasi  $(x_i - \bar{x})$  dapat dikaitkan dengan variabel-variabel pembentuknya dengan cara mengekspansikan  $(x_i - \bar{x})$  ke dalam Deret Taylor:

$$(x_i - \bar{x}) \approx (u_i - \bar{u}) \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) + (v_i - \bar{v}) \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \dots \quad (\text{E.4})$$

Dengan menggabungkan Persamaan E.3 dan E.4 kita dapat menyatakan varians  $\sigma_x^2$  sebagai fungsi dari  $\sigma_u^2, \sigma_v^2, \dots$  dari variabel  $u, v, \dots$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &\approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum \left[ (u_i - \bar{u}) \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) + (v_i - \bar{v}) \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \dots \right]^2 \\ &\approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum \left[ (u_i - \bar{u})^2 \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + (v_i - \bar{v})^2 \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + 2(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Baris kedua dapat dinyatakan dalam varians  $\sigma_u^2$  dan  $\sigma_v^2$  seperti dalam Persamaan E.3:

$$\sigma_u^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2 \right] \quad \sigma_v^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2 \right] \quad (\text{E.6})$$

sementara baris ketiga adalah kovarians  $\sigma_{uv}^2$  yang didefinisikan sebagai

$$\sigma_{uv}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) \right]. \quad (\text{E.7})$$

Dengan definisi-definisi ini, maka pendekatan untuk deviasi standar  $\sigma_x$  untuk  $x$  menjadi

$$\sigma_x^2 \approx \sigma_u^2 \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \sigma_v^2 \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \dots + 2\sigma_{uv}^2 \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right). \quad (\text{E.8})$$

Inilah yang disebut dengan persamaan penjalaran kesalahan. Dua bagian pertama dalam persamaan ini adalah varians yang dibobot oleh turunan parsial dari variabel tersebut, sementara bagian ketiga merupakan perkalian dari deviasi  $u$  dan  $v$  dan dibobot oleh oleh turunan parsial dari variabel-variabel tersebut. Jika fluktuasi pengukuran  $u$  dan  $v$  tidak memiliki korelasi apapun, maka kita dapat mengharapkan bagian ini menghilang dan bernilai nol. Pendekatan ini kadangkala dapat diterima sehingga Persamaan E.8 menjadi

$$\sigma_x^2 \approx \sigma_u^2 \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \sigma_v^2 \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \dots \quad (\text{E.9})$$

Perhitungan-perhitungan kesalahan dalam Tugas Akhir ini akan lebih banyak menggunakan Persamaan E.9 dan bagian kovarians akan diabaikan.

## Lampiran F

### Regresi Linear Terbobot

Untuk menentukan persamaan garis lurus yang merupakan representasi dari sejumlah  $N$  pasang data pengukuran  $(x_i, y_i)$  dengan galat pada  $y_i$  yaitu  $\sigma_i$ , terlebih dahulu didefinisikan parameter  $\chi^2$  yang merupakan varians dari selisih  $y_i$  dengan  $y(x_i)$ , di mana  $y(x_i)$  merupakan harga  $y$  yang diperoleh dari persamaan garis lurus dengan bentuk  $a + bx_i$ . Parameter  $\chi^2$  mengambil bentuk

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i} \right]^2. \quad (\text{F.1})$$

Koefisien  $a$  dan  $b$  ditentukan dengan cara meminimalisir  $\chi^2$  terhadap  $a$  dan  $b$ . Turunkan  $\chi^2$  terhadap  $a$  dan  $b$  dan tetapkan  $\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$ , untuk memperoleh  $a$  dan  $b$  yang memberikan  $\chi^2$  minimal:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i^2} = 0, \quad (\text{F.2})$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i(y_i - a - bx_i)}{\sigma_i^2} = 0. \quad (\text{F.3})$$

Kedua kondisi ini dapat ditulis ulang ke dalam bentuk yang lebih singkat bila kita mendefinisikan notasi-notasi berikut:

$$\begin{aligned} S &\equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}, \\ S_x &\equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \\ S_y &\equiv \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

$$S_{xx} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2},$$

$$S_{xy} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2},$$

sehingga dengan definisi ini F.2 dan F.3 menjadi

$$aS + bS_x = S_y, \quad (\text{F.5})$$

$$aS_x + bS_{xx} = S_{xy}. \quad (\text{F.6})$$

Solusi dari kedua persamaan ini adalah

$$\Delta \equiv SS_{xx} - (S_x)^2,$$

$$a = \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{\Delta}, \quad (\text{F.7})$$

$$b = \frac{SS_{xy} - S_xS_y}{\Delta}.$$

Persamaan F.7 memberikan solusi untuk parameter  $a$  dan  $b$  yang meminimalkan F.1.

Galat parameter  $a$  dan  $b$  diperoleh dengan menggunakan perambatan kesalahan (Lampiran E.8):

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2. \quad (\text{F.8})$$

Untuk persamaan garis lurus, turunan parsial  $a$  dan  $b$  terhadap  $y_i$  dapat dihitung dari Persamaan F.7:

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{S_{xx} - S_x x_i}{\sigma_i^2 \Delta}, \quad (\text{F.9})$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{S x_i - S_x}{\sigma_i^2 \Delta}. \quad (\text{F.10})$$

Dengan mensubstitusikan kedua persamaan ke dalam Persamaan F.8, diperoleh

$$\sigma_a^2 = S_{xx}/\Delta, \quad (\text{F.11})$$

$$\sigma_b^2 = S/\Delta, \quad (\text{F.12})$$

yang masing-masing merupakan varians dari  $a$  dan  $b$ .

Dalam komputasi, Persamaan F.7 rentan terhadap kesalahan pembulatan. Untuk itu dapat digunakan persamaan lain [23, hal. 507]. Definisikan

$$t_i = \frac{1}{\sigma_i} \left( x_i - \frac{S_x}{S} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{F.13})$$

dan

$$S_{tt} = \sum_{i=1}^N t_i^2, \quad (\text{F.14})$$

lalu substitusikan ke dalam Persamaan F.7 untuk memperoleh

$$a = \frac{S_y - S_x b}{S}, \quad (\text{F.15})$$

$$b = \frac{1}{S_{tt}} \sum_{i=1}^N \frac{t_i y_i}{\sigma_i}, \quad (\text{F.16})$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{S} \left( 1 + \frac{S_x^2}{S S_{tt}} \right), \quad (\text{F.17})$$

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{S_{tt}}. \quad (\text{F.18})$$

## Lampiran G

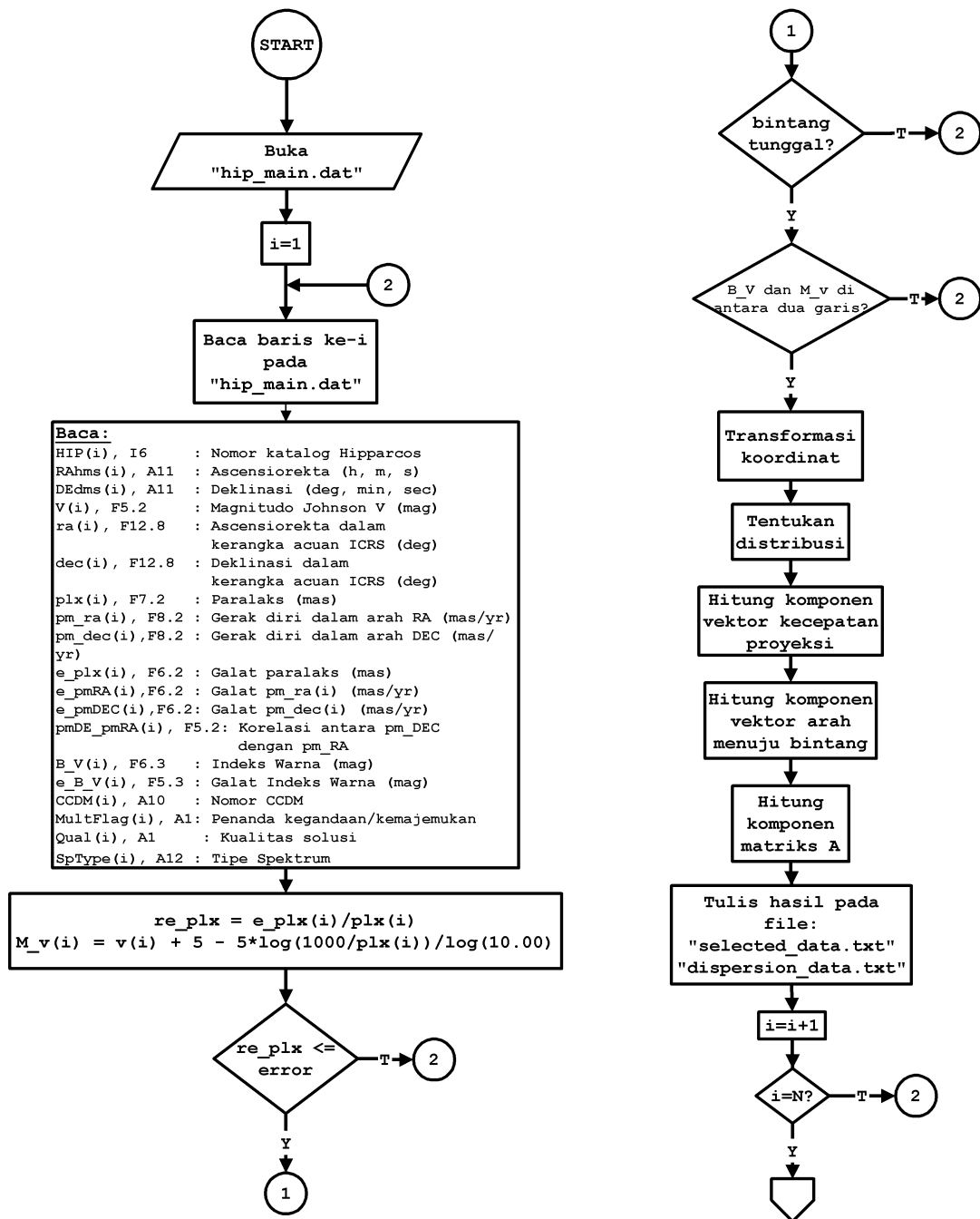
# Bagan Alir Program dan *Code* FORTRAN dalam Tugas Akhir ini

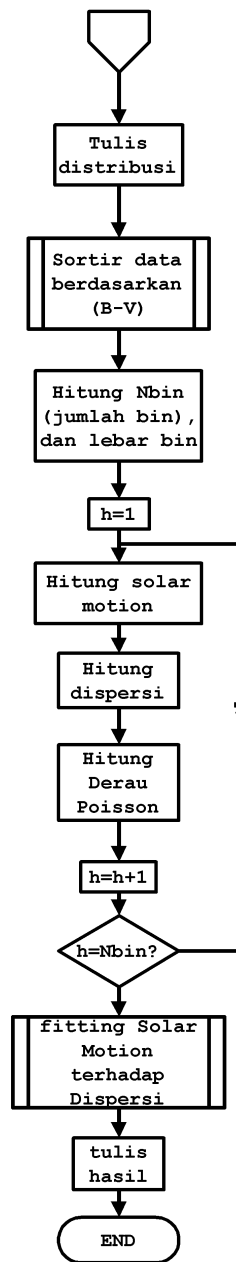
*Code* FORTRAN77 yang lengkap, beserta *file-file* pendampingnya, disertakan dalam cakram padat yang terlampir di sampul belakang buku tugas akhir ini.

### G.1 Bagan Alir dan Penjelasan *bacadata.f*

Program *bacadata.f* ditulis dalam bahasa FORTRAN77. Program ini dirancang untuk membaca data yang berisi Katalog *Hipparcos*, menyeleksi entri berdasarkan kriteria yang telah ditentukan, dan menghitung gerak lokal matahari dan kecepatan gerak matahari terhadap LSR. Program ini juga disertai langkah untuk menentukan distribusi spasial, distribusi paralaks, distribusi warna, dan distribusi gerak diri dari sampel yang sudah terseleksi. Batasan-batasan statistik diatur oleh parameter-parameter **error**, **width**, dan **dat\_in\_bin** yang masing-masing adalah toleransi dari galat relatif paralaks, lebar minimum *bin*, dan jumlah minimal data di dalam *bin*. Bagan alir (*flowchart*) *bacadata.f* adalah sebagai berikut:







Berikut ini adalah contoh dari penentuan distribusi bintang. Contoh ini adalah langkah untuk menentukan distribusi jarak bintang.

```
C      Determining the distribution in distance
      bin_min(1) = 0.00
      do h=1,100
        bin_max(h) = bin_min(h) + 5.00
        dist = 1000/plx(i)
        if ((dist.GE.bin_min(h)).AND.(dist.LT.bin_max(h)))
+         dist_(h) = dist_(h) + 1
        bin_min(h+1) = bin_max(h)
      end do
```

Langkah ini dilakukan berulang-ulang untuk setiap data ke-*i* dari Katalog.

Proses penyortiran data didasarkan pada algoritma sortir cepat (*Quicksort*), dengan menggunakan *code* yang diberikan oleh Press *et al.* (1989) dengan sedikit modifikasi: subrutin ini tidak hanya menukarkan urutan dari parameter penyortir (*e.g B - V*), tetapi juga menukarkan urutan dari seluruh baris data. Masukan adalah jumlah data N, parameter penyortir Arr, dan seluruh baris data line yang berbentuk *array* berukuran N. Saat subrutin berakhir, baris data line sudah menjadi baris data yang tersortir berdasarkan Arr.

```
      subroutine qcksrt(N, Arr, line)
      parameter (M=7, Nstack = 50, FM=7875., FA=211.,
+       FC=1663.,FMI=1./FM)
      real arr(N)
      integer Istack(Nstack)
      character*250 line(N), A1

      jstack = 0
      L= 1
      IR = N
      FX = 0.
10     if (IR-L.LT.M) then
          do 13 J=L+1,IR
              A = ARR(J)
              A1 = line(J)
              do 11 I=J-1,1,-1
                  if (ARR(I).LE.A) go to 12
                  ARR(I+1) = ARR(I)
                  line(I+1) = line(I)
11             continue
              I=0
12             ARR(I+1)=A
              line(I+1)=A1
13             continue
          if (jstack.eq.0) return
          IR = istack(jstack)
          L = istack(jstack - 1)
          jstack = jstack - 2
      else
```

```

        i=L
        J=IR
        FX=MOD(FX*FA+FC,FM)
        IQ=L+(IR-L+1)*(FX*FMI)
        A=ARR(IQ)
        A1=line(IQ)
        ARR(IQ)=ARR(L)
        line(IQ)=line(L)
20      continue
21      if (J.GT.0) then
            if (A.LT.ARR(J)) then
                J=J-1
                go to 21
            endif
        endif
        if (J.LE.I) then
            ARR(I) = A
            line(I) = A1
            go to 30
        endif
        ARR(I) = ARR(J)
        line(I) = line(J)
        I = I+1
22      if (I.LE.N) then
            if (A.GT.ARR(I)) then
                I=I+1
                go to 22
            endif
        endif
        if (J.LE.I) then
            ARR(J) = A
            line(J) = A1
            I=J
            go to 30
        end if
        ARR(J) = ARR(I)
        line(J) = line(I)
        J = J-1
        go to 20
30      jstack = jstack+2
        if (jstack.GT.nstack) pause 'NSTACK must be made larger.'
        if (IR-I.GE.I-L) then
            istack(jstack) = IR
            istack(jstack-1) = I+1
            IR = I-1
        else
            istack(jstack) = I-1
            istack(jstack-1) = L
            L = I+1
        endif
    endif
endif
go to 10
end

```

Proses inversi matriks dilakukan dengan metode Eliminasi Gauss-Jordan dan *pivoting*

penuh. Masukan adalah panjang baris dan kolom matriks yaitu  $k$  dan matriks  $X$ . Keluaran adalah invers  $X$  yaitu  $X_{inv}$ , yang pada awal subrutin masih berbentuk matriks identitas. Pada akhir subrutin, matriks  $X$  akan hancur dan berubah menjadi matriks identitas.

```

subroutine Inverse(k, X, Xinv)
real X(k,k), Xinv (k,k), Pivot(k,k), C(k)
integer i, j, l, m, p

! ===Determining the Inverse of XtX===
! Step 1: Creating Identity Matrix
do i=1,k
  do j=1,k
    if (i.EQ.j) then
      XInv(i,j)=1.00
    else
      XInv(i,j)=0.00
    endif
  end do
end do

! Step 2: First Pivot
m = 2
l = k - 1
do p=1,l
  do i=m,k
    Pivot(i,p) = X(i,p)/X(p,p)
  end do
  do i=m,k
    do j=1,k
      X(i,j) = X(i,j) - X(p,j)*Pivot(i,p)
      XInv(i,j) = XInv(i,j) - XInv(p,j)*Pivot(i,p)
    end do
  end do
  m = m + 1
end do

! Step 3: Reverse Pivot
m = k - 1
l = 2
do p=k,2,-1
  do i=m,1,-1
    Pivot(i,p) = X(i,p)/X(p,p)
  end do
  do i=m,1,-1
    do j=k,1,-1
      X(i,j) = X(i,j) - X(p,j)*Pivot(i,p)
      XInv(i,j) = XInv(i,j) - XInv(p,j)*Pivot(i,p)
    end do
  end do
  m = m - 1
end do

! Step 4: Finalization
do i=1,k
  C(i)=X(i,i)
end do

```

```

do j=1,k
  X(i,j) = X(i,j)/C(i)
  XInv(i,j) = XInv(i,j)/C(i)
end do
end do
! ===== !
return
end

```

Subrutin `fitlin` melakukan regresi linear terbobot berdasarkan uraian pada Lampiran F. Masukan adalah jumlah data  $N$ , data ordinat  $Y$  dan galatnya yaitu  $e_Y$ , dan data absis  $X$ . Keluaran adalah gradien garis galatnya yaitu  $m$  dan  $e_m$ , serta titik nol  $c$  dan galat titik nol yaitu  $e_c$ .

```

subroutine fitlin(N, Y, e_Y, X, m, e_m, c, e_c)
integer N
real Y(N), e_Y(N), X(N), m, c, e_m, e_c,
+ Sum, Sx, Sy, Sxx, Sxy, W, sxos, st2, t

Sum = 0.00
Sx = 0.00
Sy = 0.00
Sxx = 0.00
Sxy = 0.00
do i=1,N
  w = e_Y(i)*e_Y(i)
  Sum = 1.0/w + Sum
  Sx = X(i)/w + Sx
  Sy = Y(i)/w + sy
  Sxx = X(i)*X(i)/w + Sxx
  Sxy = X(i)*Y(i) + Sxy
end do
sxos = Sx/Sum
St2 = 0
m = 0.00
do i=1,N
  t = (X(i) - sxos)/e_Y(i)
  st2 = st2 + t*t
  m = m + t*Y(i)/e_Y(i)
end do

m = m/st2
c = (Sy - Sx*m)/Sum

e_m = sqrt(1.0/st2)
e_c = sqrt((1.0 + Sx*Sx/Sum/St2)/Sum)
return
end

```

## G.2 Bagan Alir dan Penjelasan veldisp.f

Sama dengan bacadata.f, program veldisp.f ditulis dalam bahasa FORTRAN77. Program ini dirancang untuk menentukan tensor dispersi kecepatan  $\sigma^2$  berdasarkan uraian pada Bab 4. Karena data yang dibaca program ini sudah diseleksi dan diolah oleh program bacadata.f, maka bagan alir program ini pada dasarnya cukup sederhana. Karena program ini membaca data yang dihasilkan oleh program bacadata.f, maka program tersebut harus dijalankan terlebih dahulu sebelum veldisp.f dijalankan.

